詳細解答

STEP I 1993，第 7 題

純數學 • 三次方程的根

> **STEP I 1993，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q7

關鍵思路

首項係數為正的三次函數（cubic）由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，所以關於它的根（root）的一切，都由它的兩個轉向點（turning point）決定。如果曲線的極大值（local maximum）在橫軸之上，而極小值（local minimum）在橫軸之下，圖像必定與橫軸相交三次；否則相交的次數較少。對於 $x^3 + ax^2 + b$，轉向點很容易準確求出，因為它的導數（derivative）可以因式分解。

解答

轉向點

對於 $\mathrm{f}(x) = x^3 + Ax^2 + B$，

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 2Ax = x(3x + 2A),$$

所以駐點（stationary point）位於 $x = 0$ 和 $x = -\frac{2A}{3}$。函數在這兩點的值是 $\mathrm{f}(0) = B$ 和

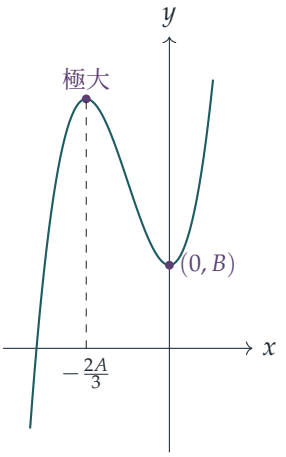
$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right) = -\frac{8A^3}{27} + \frac{4A^3}{9} + B = \frac{4A^3}{27} + B.$$

此外 $\mathrm{f}''(x) = 6x + 2A$，所以 $\mathrm{f}''(0) = 2A$ 而 $\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3}) = -2A$。當 $A > 0$ 時，位於 $x = 0$ 的點是極小點，位於 $x = -\frac{2A}{3}$ 的點是極大點；當 $A < 0$ 時，兩者的角色互換。

$A > 0$、$B > 0$ 時的草圖

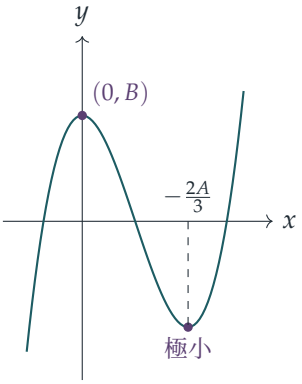
極大點位於 $(-\frac{2A}{3},\, B + \frac{4A^3}{27})$，在 y 軸的左方，而且比 B 高；極小點位於 $(0, B)$，在正 y 軸上。兩個轉向點都在 x 軸之上，所以曲線恰好與它相交一次，交點在極大點的左方。（圖

中取 $A = 3$，$B = 2$：極大點 $(-2, 6)$，極小點 $(0, 2)$。)



$A < 0$、$B > 0$ 時的草圖

現在極大點位於 $(0, B)$，而極小點位於 $\left(-\frac{2A}{3}, B + \frac{4A^3}{27}\right)$，在 y 軸的右方。由於 $A^3 < 0$，極小值小於 B，它可以是正數、零或負數。必定有一個根滿足 $x < 0$，因為 $\mathrm{f}(0) = B > 0$，而當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{f} \to -\infty$。如果極小點跌到橫軸之下，就另有兩個根滿足 $x > 0$（如圖所示，$A = -3$，$B = 2$：極小點 $(2, -2)$，根為 $1 - \sqrt{3}$、1、$1 + \sqrt{3}$）。如果極小點在橫軸上，曲線就在該處與橫軸相切。如果極小點在橫軸之上，那個負根就是唯一的根。



數算根的數目

現在考慮 $\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$。如果 $a = 0$，則 g 嚴格遞增（strictly increasing）（它的導數 $3x^2$ 只在 0 處為零），所以它恰好有一個實根。因此假設 $a \neq 0$。由上文的結果，g 有兩個相異的轉向點，函數值分別是 b 和 $b + \frac{4a^3}{27}$。

想一想 兩個轉向點的函數值怎樣告訴我們根的數目？

設轉向點為 $x_1 < x_2$。這個三次函數在 $(-\infty, x_1]$ 上嚴格遞增，在 $[x_1, x_2]$ 上嚴格遞減，在 $[x_2, \infty)$ 上嚴格遞增，所以在每一段上最多有一個根。如果 $\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知在 $(-\infty, x_1)$、(x_1, x_2) 和 (x_2, ∞) 中各有一個根（這裏用到當 $x \to \mp\infty$ 時 $\mathrm{g} \to \mp\infty$），所以共有三個相異的根。相反，如果兩個值同號，或者其中一個為零，則至少有一段的內部沒有根，根的數目最多是兩個。極大值永遠是兩個值之中較大的一個，所以「一正一負」等同於「兩者之積為負」。因此 g 有三個相異實根，當且僅當

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

（乘以 $27 > 0$ 不會改變不等式的方向。）這個結論也涵蓋 $a = 0$ 的情況，此時 $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$。

第一個條件

假設 $27b^2 + 3a^3 b < 0$。那麼 $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$，所以 $a^3 b < 0$，因此

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

根據上述判別準則，方程有三個相異實根，這正是所要證明的。

第二個條件

按照試卷上所印的寫法，第二個條件重複了不等式 $27b^2 + 4a^3 b < 0$，而用「$<$」的話，這個命題是錯的：取 $a = -3$，$b = 1$，得 $27 - 108 = -81 < 0$，但 $x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $x = 0$ 處取值 1，在 $x = 2$ 處取值 -3，所以它有三個相異實根。題目原意的不等式必定是方向相反的那一個。判別準則顯示，如果

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

（其實只要 $27b^2 + 4a^3 b \geq 0$），方程的相異實根就少於三個。至此全題完成。

所以準確的分界線是 $27b^2 + 4a^3 b = 0$。含 $3a^3$ 的條件對於有三個根是充分但非必要的：取 $a = -2$，$b = 1$，得 $27b^2 + 3a^3 b = 3 > 0$，但 $27b^2 + 4a^3 b = -5 < 0$，而 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$ 有三個根 1 和 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$。

驗算

取 $A = -3$，$B = 2$，得 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$，它的根 1、$1 \pm \sqrt{3}$ 與草圖吻合，而且 $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$，正如判別準則所預測。數值方面，對於約

80,000 對滿足第一個條件的隨機有理數 (a, b)，兩個駐點值總是異號。在 200,000 對數值中，「有三個相異根」與 $27b^2 + 4a^3b < 0$ 完全吻合。

常見錯誤

- 忘記 $a = 0$ 的情況，此時兩個轉向點合併成一個拐點（point of inflection）。
- 把轉向點的函數值為零當作有三個根：這種情況得到的是重根（repeated root），所以只有兩個相異的根。
- 嘗試完全按照所印的寫法去證明第二個命題，而沒有留意到它與判別準則矛盾。

STEP 之外

$-(4a^3b + 27b^2)$ 這個量是 $x^3 + ax^2 + b$ 的判別式（discriminant），是 $b^2 - 4ac$ 在三次方程中的對應物。它等於各根之差的平方之積，所以有三個相異實根時它是正數，有重根時是零，有兩個複數根時是負數。判別式和根的對稱函數（symmetric functions）會在伽羅瓦理論（Galois theory）中進一步發展；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是一本很好的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。