詳細解答

# STEP I 1993，第 6 題

純數學 • 曲線描繪

**STEP I 1993，第 6 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s1-q6

## 關鍵思路

一切取決於當 $N = 10^{100}$ 時 $x^N$ 的表現。若 $|x| < 1$，即使只比 1 小一點點，$x^N$ 也小得難以想像；若 $|x| > 1$，即使只比 1 大一點點，它也大得難以想像；而在 $x = \pm 1$ 時，它恰好等於 1（因為 $N$ 是偶數）。所以分式 $x^N/(1+x^N)$ 的表現就像一個開關：在 $(-1,1)$ 之內是 0，在其外是 1。至於 h，思路剛好相反：$10^{-N}x$ 實在太小，以致 sin 與它的自變量根本無從分辨。

## 解答

以下一律記

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

於是 $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$，而 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$。

### f 的特徵

- 對稱性與值域（*range*）。$N$ 是偶數，所以 $x^N = (-x)^N \geq 0$。因此 f 是偶函數（even function），而由 $0 \leq s(x) < 1$ 可得 $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$。
- 當 $|x| < 1$ 時的水平 $y = 2$。這時 $x^N \to 0$ 的速度快得驚人：例如 $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4\times 10^{97}}$。所以 $s(x) \approx x^N$ 遠遠小於任何圖像所能顯示的程度，在任何看得見的精確度下 $\mathrm{f}(x) = 2$。準確而言，$\mathrm{f}(0) = 2$。
- 當 $|x| > 1$ 時的水平 $y = 3$。現在 $x^{-N}$ 同樣微小，所以在任何看得見的精確度下 $s(x) = 1/(1+x^{-N})$ 就是 1，而 $\mathrm{f}(x) = 3$，並且是從下方趨近。（事實上，當 $|x| \to \infty$ 時，直線 $y = 3$ 是一條漸近線（asymptote）。）

- 在 $x = \pm 1$ 處的跳躍。在 $x = \pm 1$ 處，$x^N = 1$，所以 $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$，正好在半途。這個函數是連續（continuous）而且可微（differentiable）的，所以草圖中的垂直線段其實是極之陡峭的攀升。求導可得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

**想一想** 圖像中「垂直」的部分究竟有多窄？

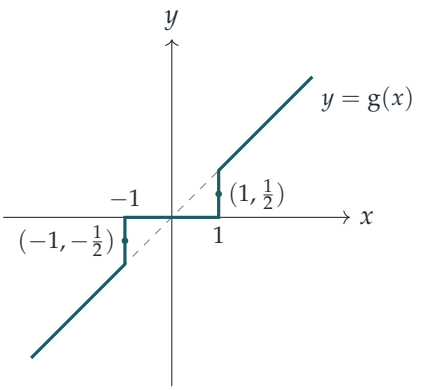
設 $x = 1 + \delta$，其中 $\delta$ 很小，則 $x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$，而 $s(x) \approx 1/(1+\mathrm{e}^{-N\delta})$。當 $N\delta$ 由 $-\ln 99$ 增至 $\ln 99$ 時，它由 0.01 攀升至 0.99，也就是說，整個過程只發生在一個寬度約為 $9 \times 10^{-100}$ 的區間內。在任何圖上，這都是一條垂直線。根據對稱性，在 $x = -1$ 處也是如此。（$\mathrm{f}'$ 的正負號還告訴我們，f 在 $x > 0$ 時遞增，在 $x < 0$ 時遞減，因為 $x^{N-1}$ 與 $x$ 同號。）

### g 的圖像

由於 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$，開關 $s$ 現在乘在直線 $y = x$ 上：

- 當 $|x| < 1$ 時，$s(x)$ 可以忽略，所以在任何看得見的精確度下 $\mathrm{g}(x) = 0$（在 $x = 0$ 處恰好是 0）；
- 當 $|x| > 1$ 時，在任何看得見的精確度下 $s(x)$ 就是 1，所以 $\mathrm{g}(x) = x$；準確而言，$x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$，這個差可以忽略；
- 在 $x = \pm 1$ 處，$\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$，正好在每個跳躍的半途。

g 是奇函數（odd function），因為 $s$ 是偶函數而 $x$ 是奇函數。它也是遞增的：$\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$，而這兩項都 $\geq 0$，因為 $x$ 與 $s'(x)$ 同號。在 $x = 1$ 處斜率是 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$，所以我們再次看到一個看似垂直的跳躍，這次是在 $x = 1$ 處由 0 升至 1，以及在 $x = -1$ 處由 $-1$ 升至 0。



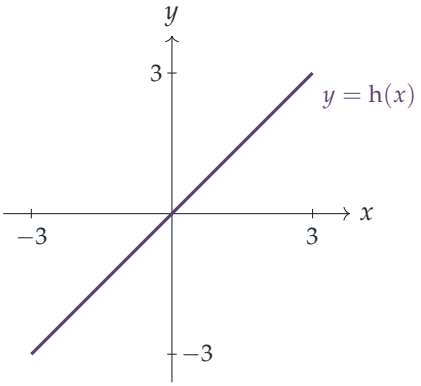
g 在 $[-3,3]$ 上的草圖：在 $(-1,1)$ 上為零，在其外是直線 $y=x$（虛線），兩者之間由經過 $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$ 的近乎垂直的攀升連接起來。

### h 的圖像

設 $u=10^{-N}x$。當 $|x|\le 3$ 時，我們有 $|u|\le 3\times 10^{-N}$，這是極其微小的。對於細小的 $u$，$\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$，而當 $u>0$ 時我們有上下界 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$。乘以 $10^N$，當 $0\le x\le 3$ 時，

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

而 h 是奇函數，所以當 $-3\le x\le 0$ 時同樣的結論成立，只是正負號相反。因此在 $[-3,3]$ 上，在任何想像得到的精確度下，h 的圖像就是經過原點的直線 $y=x$，在 $x>0$ 時比它低一絲，在 $x<0$ 時比它高一絲。它的斜率是 $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$，與 1 的差距約在 $10^{-2N}$ 之內。




正弦波仍然存在，只是被極度拉闊了：它的第一個極大值位於 $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$，高度為 $10^N$，所以在窗口 $[-3,3]$ 內只看得見經過原點、看似筆直的一小段。

## 驗算

- 以 $s=1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$ 直接計算：$s(0.999)$ 和 $s(1.001)$ 在機器精確度下分別是 0 和 1，而 $s(\pm1)=\frac{1}{2}$ 是準確值。
- 取一個不太大的 $N$，例如 $N=10$ 或 200，數值微分證實 $s'(1)=N/4$ 和 $\mathrm{g}'(1)=\frac{1}{2}+N/4$，而細密的格點顯示 g 在 $[-3,3]$ 上遞增。增大 $N$ 只會令階梯更加陡峭分明。
- 對於隨機選取的 $x\in[-3,3]$，$10^{100}\sin(10^{-100}x)$ 與 $x$ 在完整的雙精度下吻合，而按比例縮小的類比 $M\sin(x/M)$ 在 $M=1000$ 時符合上下界 $0<x-M\sin(x/M)\le x^3/(6M^2)$。

## 常見錯誤

- 忘記 $N$ 是偶數：當 $x < -1$ 時，$x^N$ 極大而且是正數，所以 f 在那裏是 3，而不是別的數值。
- 把階梯說成真正的不連續點。三個函數全都是連續的（其實還是可微的）；那些攀升只是陡峭得畫不出來。
- 把 h 當成一個振盪的圖像。在 $[-3,3]$ 上，它離任何轉向點都還遠得很。

## STEP 之外

函數 $x^n/(1+x^n)$ 在 $n \to \infty$（只取偶數值）時逐點收斂（pointwise convergence）於一個階梯函數（step function），它在 $(-1,1)$ 之內是 0，在 $\pm 1$ 處是 $\frac{1}{2}$，在其外是 1：這是一列光滑函數，其極限卻不連續。這是一個經典例子，說明為何分析學家需要一致收斂（uniform convergence），而這正是實分析（real analysis）入門課程的核心概念。函數 h 則展示了另一面：當 $M \to \infty$ 時，$M\sin(x/M) \to x$ 在有界區間上一致收斂。Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門讀本）把這兩個概念都講得十分易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。