詳細解答

STEP I 1993，第 5 題

純數學 • 絕對值與三角不等式

> **STEP I 1993，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q5

關鍵思路

一切都建基於三角不等式（triangle inequality）：和的長度不會超過各項長度之和。逐項運用這個不等式，便可用一個關於 $|z|$ 的等比級數（geometric series）來界定多項式的大小；而當 $|z| \leq \frac{1}{2}$ 時，這個級數始終嚴格小於 1。若要成為根（root），多項式部分必須等於 -1，而它的模（modulus）恰好是 1，所以根不可能落在圓盤（disc）$|z| \leq \frac{1}{2}$ 之內。

解答

模與乘積法則

設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數，則模就是原點到點 (x, y) 的距離：

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(取非負平方根)}.$$

設 $z_1 = a + \mathrm{i}b$ 及 $z_2 = c + \mathrm{i}d$，其中 a, b, c, d 為實數。那麼 $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$，所以

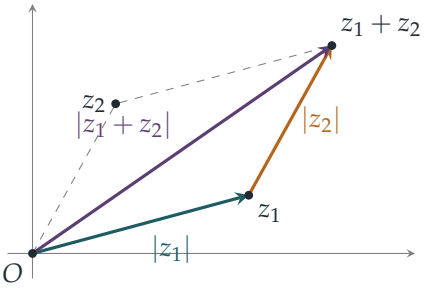
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$ 和 $|z_1||z_2|$ 都是非負數，所以兩邊取平方根便得 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，這正是所要證明的結果。

三角不等式

在阿根圖（Argand diagram）上，設 O 為原點，A 為點 z_1，C 為點 z_1+z_2。那麼 $\overrightarrow{AC}$ 代表 z_2（它與由 O 到 z_2 的向量相同），所以 OAC 是一個三角形，其邊長為

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1+z_2|.$$



兩點之間以直線最短：由 O 直接走到 C，不會比繞道 A 更長。因此

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

等號成立，當且僅當 O、A、C 三點共線而 A 位於另外兩點之間，也就是說，z_1 與 z_2 指向同一方向（或其中一個為 0）。

如果你較喜歡代數方法：以 $\bar{z}$ 表示共軛（conjugate），則

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2, \end{aligned}$$

這是因為複數的實部不會超過它的模，而根據乘積法則，$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$。

重複運用這個不等式（對項數作一個簡單的歸納法（induction）），便得

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

對任意複數 $w_1, \ldots, w_n$ 均成立。

多項式的上界

假設對每個 j 都有 $|a_j| \le 1$，並且 $|z| \le \frac{1}{2}$。那麼

$$\begin{aligned} \left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z\right| &\le |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\le |z|^n + |z|^{n-1} + \cdots + |z| \\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &< 1. \end{aligned}$$

第一行用了 n 項的三角不等式，再配合乘積法則(重複使用，從而得出 $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$)。第二行用了 $|a_j| \le 1$，第三行用了 $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$，第四行則是把有限等比級數求和。這就是所要求的嚴格不等式。

? **想一想** 那個嚴格不等式是從哪裏來的？上面每一步都只是「$\le$」。

它來自有限等比級數：$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 與 1 之間恰好相差 $\frac{1}{2^n} > 0$。接下來的推論所需要的，正是這個差距。

根

(試卷最後一行寫的是 $|x| > \frac{1}{2}$；這顯然是 $|w| > \frac{1}{2}$ 的誤印，因為所討論的根是 w。)

設 w 為一個根，則

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{因此} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

用反證法（proof by contradiction），假設 $|w| \le \frac{1}{2}$。那麼在上一部分取 $z = w$，便得 $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$，這與模恰好等於 1 矛盾。因此每個根都滿足 $|w| > \frac{1}{2}$。

驗算

- 這個上界在極限情況下可以達到：當每個 $a_j = 1$ 而 $z = \frac{1}{2}$ 時，左邊恰好等於 $1 - 2^{-n}$。
- 關於根的結論同樣是最佳的。取每個 $a_j = -1$，得到 $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$，它的正根在 $n = 1$ 時是 1，在 $n = 2$ 時是 0.618（即黃金比的共軛值），在 $n = 5$ 時是 0.5087，在 $n = 10$ 時是 0.50025：總是大於 $\frac{1}{2}$，卻趨向於它。
- 數值方面，我們測試了 50 000 組隨機選取的數據，其中 a_j 取自單位圓盤，z 取自半徑為 $\frac{1}{2}$ 的圓盤（所得的最大值為 0.79）；又求出了 2000 個這類隨機多項式的所有根：根的模最小為 0.562。

常見錯誤

- 寫成 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$。三角不等式只能給出「$\le$」。
- 使用無窮級數之和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$，這樣只能得到 ≤ 1，令推論無法成立。應該用有限和。
- 忘記說明為何 $|z^k| = |z|^k$：它可由你剛剛證明的乘積法則推出。

STEP 之外

這是多項式根的界的入門版本，而這類界正是數值求根方法的基礎：柯西（Cauchy）界把多項式的每個根都限制在一個圓盤之內，其半徑只取決於係數的大小；而同樣的「主導項勝出」論證，也是複分析（complex analysis）中魯歇（Rouché）定理的核心。三角不等式本身就是度量（metric）的定義性質，而度量這個抽象的距離概念，正是大學一年級分析課程的核心。若想看一個以幾何觀點出發、處理得極為優美的講法，可讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。