詳細解答

STEP I 1993，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1993，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q4

關鍵思路

代換（substitution）$t = \pi - x$ 把區間 $[0, \pi]$ 反射到它自身，而且不會改變 $\sin x$，因為 $\sin(\pi - t) = \sin t$。於是那個礙事的因子 x 變成 $\pi - t$，而我們要求的積分會帶着負號在右邊再次出現，這樣就可以把它解出來。至於其後的積分，主要工作是把 $1 + \cos^2 x$ 用 $\sin x$ 表示。在 $[\pi, 2\pi]$ 上，平移 π 就可以回到 $[0, \pi]$。

解答

一般結果

設 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，並令 $t = \pi - x$，則 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$。當 $x = 0$ 時 $t = \pi$，當 $x = \pi$ 時 $t = 0$。另外 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

最後一個積分又是 I，因為積分變量（variable of integration）叫甚麼名字並無關係。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$，由此得

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

這正是所要證明的結果。（我們需要這些積分存在，例如 f 在 $[-1, 1]$ 上連續（continuous）即可。）

$[0,\pi]$ 上的積分

> **想一想** 被積函數（integrand）含有 $\cos^2 x$，而不只是 $\sin x$。它真的是 $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ 的形式嗎？

是的。由於 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$，我們有 $1+\cos^2 x = 2-\sin^2 x$，所以

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{其中} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2-s^2},$$

而且 f 在 $[-1,1]$ 上連續。根據一般結果，

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

餘下的積分很容易，因為 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的導數（derivative）（差一個負號）。代入 $u = \cos x$，其中 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$[0,2\pi]$ 上的積分

一般結果只適用於 $[0,\pi]$，所以我們把積分範圍拆開：

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

> **想一想** 怎樣才能把 $\int_\pi^{2\pi}$ 化回 $[0,\pi]$ 上的積分？

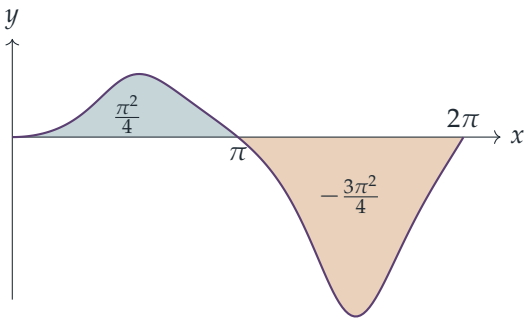
平移 π：令 $x = u+\pi$，於是 u 由 0 變到 π。這時 $\sin x = -\sin u$ 而 $\cos x = -\cos u$，所以 $\cos^2 x = \cos^2 u$。因此

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u+\pi)(-\sin u)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},\end{aligned}$$

這裏用了上一部分的兩個結果。把兩部分相加，

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

從圖像可以看出答案為甚麼是負數。在 $[\pi,2\pi]$ 上，因子 $\sin x$ 是負的，而且那裏的因子 x 比在 $[0,\pi]$ 上的大。所以軸下方的面積多於軸上方的面積。



驗算

- 取 $f \equiv 1$：一般結果給出 $\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}$，這是正確的。
- 被積函數在 $(0,\pi)$ 上為正，所以第一個答案必須是正數，而 $\pi^2/4 \approx 2.467$ 確實如此。用辛普森法則（Simpson's rule）計算，第一個積分得 2.4674011，第二個得 -4.9348022，與 $\pi^2/4$ 和 $-\pi^2/2$ 吻合。
- 隨機選取幾個 f 作數值檢驗，一般恆等式（identity）同樣成立。

常見錯誤

- 直接在 $[0,2\pi]$ 上套用一般結果。這個結果依賴反射 $x \mapsto \pi - x$ 把區間映射到它自身，而在 $[0,2\pi]$ 上這樣做會得出錯誤答案 $\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$（那裏正確的反射是 $x \mapsto 2\pi - x$，而 $\sin x$ 在這個反射下會變號）。
- 漏掉 $dx = -dt$ 中的負號，或者忘記把積分上下限調換回來。
- 寫成 $\arctan(-1) = 3\pi/4$：反正切（arctangent）的取值範圍是 $(-\pi/2, \pi/2)$，所以 $\arctan(-1) = -\pi/4$。

STEP 之外

這裏的竅門是利用定義域（domain）的一種對稱性（symmetry），而被積函數幾乎保持這種對稱：把 x 換成 $\pi - x$，再把積分的兩個版本取平均。用同樣的想法，完全不必積分就可以得到 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$。在大學裏，這類對稱性論證在分析學（analysis）中隨處可見，也出現在傅立葉級數（Fourier series）中，在那裏函數的奇偶性（parity）決定哪些項得以保留。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多這類代換的 STEP 式練習，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 則嚴格地建立了變量代換法則（change-of-variables rule）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。