詳細解答

STEP I 1993，第 3 題

純數學 • 丟番圖方程

> **STEP I 1993，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

關鍵思路

由於 $p \le q \le r$，倒數（reciprocal）$\frac{1}{p}$ 是三項之中最大的一項。所以三項之和最多是 $\frac{3}{p}$，這樣 p 就只剩下兩三個可能的值。p 一經確定，對餘下兩項再用同一招便可限制 q 的範圍，然後 r 就別無選擇。整個想法是利用大小次序，把一條含三個未知數的方程（或不等式（inequality））化為一次簡短的有限驗證。

解答

第 (i) 部分

由於 $1 \le p \le q \le r$，我們有 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$。所以

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

由此得 $p \le 3$。另外 $p \neq 1$，否則 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$，而這對正數 q, r 是不可能的。所以 $p = 2$ 或 $p = 3$。

情況 $p = 2$。這時 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$。由於 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

又因為 $\frac{1}{r} > 0$，必須有 $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$，所以 $q \ge 3$。

- $q = 3$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，所以 $r = 6$。
- $q = 4$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，所以 $r = 4$。

情況 $p=3$。這時 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{q}$，所以 $q\le 3$。連同 $q\ge p=3$，只可能是 $q=3$，於是 $\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$，所以 $r=3$。

所有情況都已考慮，因此僅有的解是

$$(p,q,r)=(2,3,6),\quad (2,4,4),\quad (3,3,3),$$

再沒有其他解。

第 (ii) 部分

若 $p=1$，則無論 q 和 r 取甚麼值，和都是 $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$。這些就是題目已告訴我們的解。（按次序 $p\le q\le r$，這些解就是 $q=n$、$r=m$，其中 $1\le n\le m$。題目在 m 與 n 之間所寫的不等式方向反了，但這並無影響：$p=1$ 對任何 q 和 r 都成立。）所以我們要找的是 $p\ge 2$ 的解。

和之前一樣，$\frac{1}{p}$ 是最大的一項，所以

$$1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{3}{p}\quad\Longrightarrow\quad p<3.$$

連同 $p\ge 2$，得 $p=2$。現在我們需要

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

? **想一想** 為甚麼這次 q 的上界是嚴格（strict）不等式？這有沒有影響？

由於 $\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}$，我們有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{2}{q}$，所以 $q<4$。正是這個嚴格不等式排除了 $q=4$。（在第 (i) 部分，$q=4$ 是容許的，並給出等號成立的情況 $(2,4,4)$。）連同 $q\ge p=2$，得 $q=2$ 或 $q=3$。

- $q=2$：和是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{r}>1$，對每一個 r 都成立。所以對每個整數 $r\ge 2$，$(2,2,r)$ 都是解。
- $q=3$：我們需要 $\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $r<6$。連同 $r\ge q=3$，得 $r=3,4,5$。

所以，除了 $p=1$ 的那一族解之外，其餘的解是

$$(p,q,r)=(2,2,r)\text{ 其中 }r\text{ 為任何整數，}r\ge 2,\qquad (2,3,3),\quad (2,3,4),\quad (2,3,5).$$

以上每一步都是別無選擇的，所以再沒有其他解。

驗算

直接代入。例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$，但 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 剛好相等。這說明了為甚麼 $(2,3,5)$ 是 $q=3$ 那一族的最後一個，而 $(2,3,6)$ 則是第 (i) 部分的邊界情況。同樣，

$(2,4,4)$ 給出的和剛好是 1，所以 $p=2$、$q=4$ 的組合全都進不了第 (ii) 部分。用電腦搜尋所有 $1 \le p \le q \le r < 400$，結果與兩張清單完全吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分漏掉無窮多個解的那一族 $(2,2,r)$。一旦 $p=q=2$，頭兩項加起來已經是 1。
- 在第 (ii) 部分把 $p<3$ 寫成 $p \le 3$，然後在 $p=3$ 上浪費時間（這時和最多只是 1）。
- 只列出解，卻沒有說明每種情況都已檢查。「再沒有其他解」這一句佔了一半分數。

STEP 之外

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$ 的解，正好就是那些能令內角為 $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ 的三角形存在於球面上的三元組。它們與三維空間中的有限對稱羣（symmetry group）互相對應：二面體羣（dihedral）$(2,2,r)$、四面體羣（tetrahedral）$(2,3,3)$、八面體羣（octahedral）$(2,3,4)$ 和二十面體羣（icosahedral）$(2,3,5)$。第 (i) 部分則給出平面的三種正則鑲嵌（regular tiling）。像這樣要求整數解的方程，稱為丟番圖方程（Diophantine equation）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是很好的入門書，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 則講述了這些對稱羣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。