詳細解答

STEP I 1993，第 2 題

純數學 • 等比級數

> **STEP I 1993，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

關鍵思路

每個級數（series）都是抽走了部分項的等比數列（geometric progression）。$\mathrm{S}_n(r)$ 中的指數是所有不是 3 的倍數的數。$\mathrm{T}_n(r)$ 中的指數是偶數或 3 的倍數的數。因此，我們把每個和寫成若干個完整等比數列的組合：取一個完整的數列再減去不要的項，或者把兩個數列相加，再減去重複計算了的項。

解答

偶數次冪之和

左邊是一個首項為 1、公比（common ratio）為 r^2、共有 $n+1$ 項的等比數列。把它記作 E。那麼

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

因為其餘各項全部互相抵銷。若 $|r| \neq 1$，則 $r^2 \neq 1$，所以可以除以 $1 - r^2$：

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

正是所要證明的結果。（對實數 r 而言，條件 $r^2 \neq 1$ 恰好就是 $|r| \neq 1$。）

級數 $S_n(r)$

指數 $1,2,4,5,7,8,10,\ldots,3n-1$ 是由 1 至 $3n-1$ 之間所有不是 3 的倍數的整數。它們可以配成一對對的 $3k+1,\ 3k+2$，其中 $k=0,1,\ldots,n-1$。所以

$$S_n(r)=\sum_{k=0}^{n-1}(r^{3k+1}+r^{3k+2})=(r+r^2)\sum_{k=0}^{n-1}r^{3k}.$$

最後的那個和是一個公比為 r^3、共有 n 項的等比數列。對實數 r 而言，$r\neq 1$ 即保證 $r^3\neq 1$，所以

$$S_n(r)=\frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

另一個等價的做法，是取所有冪 $r,r^2,\ldots,r^{3n}$，再剔除指數為 3 的倍數的項：

$$S_n(r)=\frac{r(1-r^{3n})}{1-r}-\frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

求極限時要用的，正是這第二個形式。

極限（limit）。若 $|r|<1$，則當 $n\to\infty$ 時 $|r^{3n}|=|r|^{3n}\to 0$。因此

$$S_n(r)\to\frac{r}{1-r}-\frac{r^3}{1-r^3}.$$

現在 $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{1}{1-r}-1$，而 $\dfrac{r^3}{1-r^3}=\dfrac{1}{1-r^3}-1$。兩個 -1 互相抵銷，餘下

$$S_n(r)\to\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^3},$$

正是所要證明的結果。

級數 $T_n(r)$

指數 $0,2,3,4,6,8,9,10,12,\ldots,6n$ 是由 0 至 $6n$ 之間所有偶數或可被 3 整除（或兩者皆是）的整數。

> ? **想一想** 如果把偶數次冪與指數為 3 的倍數的冪相加，哪些項被計算了兩次？

一個指數既是偶數又是 3 的倍數，當且僅當它是 6 的倍數。所以我們運用容斥原理（inclusion–exclusion）：加上偶數次冪，加上指數為 3 的倍數的冪，再減去指數為 6 的倍數的冪。在 $6n$ 或以下，有

- 偶數次冪 $r^0,r^2,\ldots,r^{6n}$，它們組成一個公比為 r^2、共有 $3n+1$ 項的等比數列；
- 指數為 3 的倍數的冪 $r^0,r^3,\ldots,r^{6n}$，它們組成一個公比為 r^3、共有 $2n+1$ 項的等比數列；

- 指數為 6 的倍數的冪 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$，它們組成一個公比為 r^6、共有 $n+1$ 項的等比數列。

把第一個結果中的 n 換成 $3n$，再對公比 r^3 和 r^6 運用同樣的論證，便得到

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

由於 $|r| \neq 1$，每個分母都不等於零。這就是為甚麼題目在這裏要求 $|r| \neq 1$，而對 S_n 只要求 $r \neq 1$：$r = -1$ 會令 $1-r^2$ 和 $1-r^6$ 變成零。

極限。若 $|r| < 1$，則 r^{6n+2}、r^{6n+3} 和 r^{6n+6} 全部趨向 0。所以

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

利用 $1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$，以 $1-r^6$ 為公分母通分，便可化簡為：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1$、$r = 1$、$r = -1$ 的情況

我們先數一數項數。在每一組六個指數 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$ 之中，是偶數或可被 3 整除的有 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$，即四個。$k = 0, \ldots, n-1$ 的各組涵蓋了直至 $6n-1$ 的指數，而最後一項是 r^{6n}。所以 $\mathrm{T}_n(r)$ 共有 $4n+1$ 項。

- $r > 1$：每一項 r^e 都滿足 $r^e \geq 1$，所以 $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$，因此 $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$。
- $r = 1$：每一項都等於 1，所以 $\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$。公式在這裏失效，因為它的分母都是零。
- $r = -1$：當 e 是偶數時 $(-1)^e$ 為 $+1$，當 e 是奇數時則為 -1。在每一組中，指數 $6k, 6k+2, 6k+4$ 是偶數，而 $6k+3$ 是奇數，所以每一組的貢獻是 $1+1-1+1=2$。因此

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

在這三種情況下，$\mathrm{T}_n(r)$ 都發散（diverge）至 $+\infty$。留意 $r = -1$ 時同樣發散：指數為 3 的奇數倍的項不足以抵銷那些偶數次項。試與 $1-1+1-\cdots$ 這類簡單的交錯級數（alternating series）比較，後者只是振盪（oscillate）而已。

驗算

- 在 S_n 的公式中代入 $n=1$：$\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r+r^2$，結果正確。

- 在 T_n 的極限中代入 $r = \frac{1}{2}$。公式給出 $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$，而直接把 $T_n(\frac{1}{2})$ 的幾百項加起來，也得到相同的數值。
- 當 $r \to 1^-$ 時，T_n 的極限的表現近似 $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$。這與每六個冪之中有四個出現的事實吻合，即約為完整級數 $\frac{1}{1-r}$ 的三分之二。

常見錯誤

- 忘記減去指數為 6 的倍數的項，以致把 $1, r^6, r^{12}, \ldots$ 計算了兩次。
- 數錯各個等比數列的項數。由 0 至 $6n$ 共有 $3n+1$ 個偶數指數，而不是 $3n$ 個。
- 沒有實際把一組的項加起來，便假設 $T_n(-1)$ 會像交錯級數那樣振盪。

STEP 之外

要數算一個併集（union）中的項，可以把兩個集合相加，再減去它們的交集（intersection），這就是容斥原理。它與生成函數（generating function）結合起來，是組合數學（combinatorics）和數論（number theory）中的標準工具：我們求得的極限，正是與 6 有公因數的非負整數的生成函數。同樣的篩法（sieve）思想，若對每一個質數（prime）都運用一次，便得出黎曼 ζ 函數（Riemann zeta function）的歐拉（Euler）乘積。大學本科的分析學（analysis）會把「當 $|r| < 1$ 時 $r^n \to 0$」這一步嚴格化，並探討無窮級數在甚麼情況下可以這樣重新排列。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。