詳細解答

STEP I 1993，第 16 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP I 1993，第 16 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.20 節蒲豐投針中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/buffon.html

關鍵思路

這就是蒲豐投針問題（Buffon's needle）。針會否跨過最近的那條線，只取決於針尖朝着該線伸出多遠，而這段伸出的距離正是半根針在垂直方向上的投影（projection）。先固定針的中心與線的距離，單憑角度求出條件概率（conditional probability），然後再對距離取平均。第一部分的積分正是這個取平均的過程所產生的積分，這就是題目由它開始的原因。

解答

積分

設 $y = \cos^{-1} t$，則 $t = \cos y$，$\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$。當 $t = 0$ 時，$y = \frac{\pi}{2}$；當 $t = 1$ 時，$y = 0$。因此

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

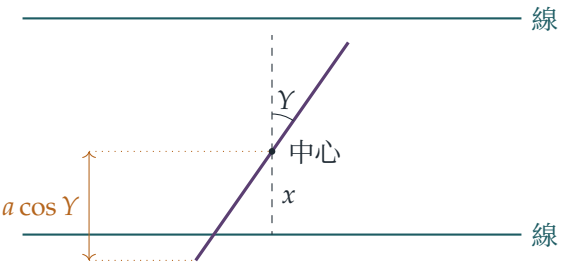
取 $u = y$ 和 $\mathrm{d}v = \sin y \,\mathrm{d}y$，以分部積分法（integration by parts）計算，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y \,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

（另一做法：這個積分是 $y = \cos^{-1} t$ 與兩條坐標軸之間的面積，而這個區域與 $t = \cos y$ 在 $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ 之下的區域相同，面積即 $\int_0^{\pi/2} \cos y \, \mathrm{d}y = 1$。）

已知 $X = x$ 時的概率



針的每一半長度為 a，並與各線的垂直線成角 Y，所以針的兩端分別位於中心兩側，與中心的垂直距離為 $a\cos Y$。最近的線與中心相距 x，故此針跨過該線，當且僅當

$$a\cos Y \ \ge \ x.$$

（等號成立時，針尖剛好碰到線，這種情況的概率為零，所以是否把它計算在內並無影響。）

? **想一想** 怎樣把 $a\cos Y \ge x$ 化為只涉及 Y 的條件？

由於 cos 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是遞減的，答案視乎 x/a 這個值能否取到。

- 若 $x \ge a$，則 $a\cos Y \le a \le x$，而等號只在 $Y = 0$ 且 $x = a$ 時成立，所以概率為 0。
- 若 $0 \le x < a$，則 $\cos Y \ge x/a$ 等價於 $Y \le \cos^{-1}(x/a)$，其中 $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$。由於 Y 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈（uniform），

$$\mathrm{P}(\text{跨線} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

這裏用到了 X 與 Y 的獨立性（independence）：即使知道 $X = x$，Y 仍然在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈。

一般投擲的概率

現設 $a < b$。X 的概率密度（density）在 $[0, b]$ 上為 $1/b$。因為 $a < b$，有可能跨線的區間 $[0, a)$ 位於 $[0, b]$ 之內，而條件概率在 $[a, b]$ 上為零。根據全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(\text{跨線}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{跨線} \mid X = x)\,\frac{1}{b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^a \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

代入 $x = at$，$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$，並利用第一部分的結果，

$$\mathrm{P}(\text{跨線}) = \frac{2a}{\pi b}\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

這正是所求的結果。由於 $a < b$，針比線與線之間的間距 $2b$ 短，絕不可能碰到第二條線，所以「跨過某一條線」與「跨過最近的線」是同一事件。

驗算

- 當 $a \to b$ 時，答案趨向 $2/\pi \approx 0.637$，小於 1，這是必然的：即使針與間距一樣長，它仍然經常近乎平行於各線而落下。
- 答案與 a 成正比：把一根短針的長度加倍，跨線的機會也加倍，這與「跨線次數的期望值（expected number）是長度的線性函數」這一事實吻合。
- 按實際的幾何情況進行模擬（中心在一條帶狀區域內均勻分佈，角度均勻分佈），取 $a = 1$、$b = 2$，投擲 4×10^5 次後得出 0.3183，而 $1/\pi \approx 0.31831$。以中點法則作數值積分（midpoint quadrature），得 $\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = 1.0000000$。

常見錯誤

- 把 $a\cos Y$ 誤寫成 $a\sin Y$：這裏的 Y 是由各線的垂直線量起，而不是由各線本身量起。
- 以公式 $\frac{2}{\pi}\cos^{-1}(x/a)$ 在整個 $[0, b]$ 上對條件概率積分；這個公式在 $x > a$ 時沒有定義，而條件概率在該處為 0。
- 對 X 取平均時忘記乘上密度 $1/b$。

STEP 之外

蒲豐（Buffon）在十八世紀提出這個問題，它是幾何概率（geometric probability）的經典例子：把概率當作參數空間中的面積來計算，這裏的參數空間是矩形 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$。由於答案涉及 π，投針便可以為 π 提供一個（非常緩慢的）蒙地卡羅（Monte Carlo）估計。這個問題有一個漂亮的推廣，稱為「蒲豐麵條」（Buffon's noodle）：利用期望值的線性性質（linearity of expectation）可以證明，任何形狀的曲線，其跨線次數的期望值只取決於曲線的長度。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）涵蓋了這類連續聯合分佈（continuous joint distributions）與取條件的方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。