詳細解答

STEP I 1993，第 15 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

> **STEP I 1993，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q15

關鍵思路

這是一道披着故事外衣的貝葉斯定理（Bayes' theorem）題目。竅門在於以眞正的方向為條件，然後問：在每種情況下，那位土著給出這一連串答案的可能性有多大。Biscii 族人永遠說謊，所以 Biscii 族人重複作答時，答案必定一致，而且必定指向錯誤的方向。因此，答案重複出現，會令你更有可能正在跟 Biscii 族人說話，這正是多問一次便可能推翻你原來決定的原因。

解答

只考慮 Ascii 族人

Ascii 族人每次回答問題時，說真話的概率是 $\frac{3}{4}$，且與之前的答案獨立（independent）。這條問題只有兩個可能的答案（左或右），所以兩次答案相同，當且僅當兩次都是真話或兩次都是假話：

$$\mathrm{P}(\text{兩次答案相同}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

正如所求。其中「兩次都是真話」的情況佔了 $\frac{9}{16}$，所以根據條件概率（conditional probability）的定義，

$$\mathrm{P}(\text{說真話} \mid \text{兩次答案相同}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

這就是第二個結果。

兩次回答「左」

設 L 為「左是正確方向」這個事件（event），R 為「右是正確方向」這個事件。設 A 和 B 分別為土著是 Ascii 族人和 Biscii 族人的事件，其中 $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$，$\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$，而土著屬於哪一族與地理情況獨立。船長起初對方向一無所知，所以我們取 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$。設 E_2 為土著兩次都回答「左」的事件。

想一想 為甚麼求 $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$ 比求 $\mathrm{P}(L \mid E_2)$ 容易？

一旦知道真正的方向，每一族的行為便完全確定，所以答案出現的概率很容易寫出來。然後貝葉斯定理便會把這些概率倒轉過來。

若左是正確的，Ascii 族人要兩次都說真話才會兩次回答「左」，概率是 $\frac{9}{16}$。Biscii 族人會說謊而回答「右」，所以不可能產生 E_2。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{9}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{99}{256}.$$

若右是正確的，Ascii 族人要兩次都說謊才會兩次回答「左」，概率是 $\frac{1}{16}$，而 Biscii 族人則必定兩次都回答「左」。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11+80}{256} = \tfrac{91}{256}.$$

L 和 R 的先驗概率（prior）相等，所以在貝葉斯定理中互相抵消：

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

這個值大於 $\frac{1}{2}$，所以左是較有可能的方向，船長應該向左走，而他走對的概率是 $\frac{99}{190}$。

三次回答「左」

設 E_3 為三次都回答「左」的事件。同樣的推論仍然適用，只是現在 Ascii 族人給出三個獨立的答案：

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \tfrac{11}{16}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 0 = \tfrac{11}{16} \cdot \tfrac{27}{64} = \tfrac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \tfrac{11}{16}\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \tfrac{5}{16} \cdot 1 = \tfrac{11}{1024} + \tfrac{320}{1024} = \tfrac{331}{1024}.$$

由於 $\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$，而且先驗概率相等，現在右才是較有可能的方向。確切地說，

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

所以船長應該向右走，此時他走對的概率是 $\frac{331}{628}$。

想一想 第三個「左」怎麼會令左變得更不可能？

每多一個「左」，Ascii 族人對 $\mathrm{P}(E \mid L)$ 的貢獻便乘以 $\frac{3}{4}$。在 $\mathrm{P}(E \mid R)$ 中，Ascii 族人的一項會縮小至原來的 $\frac{1}{4}$，但 Biscii 族人的一項始終保持在 $\frac{5}{16}$。一長串完全相同的答案，正是 Biscii 族人會給出的，所以證據愈來愈傾向於說「這是個說謊者」。說真話的 Ascii 族人也會前後一致，但概率只有 $(\frac{3}{4})^n$，而這個值會逐漸趨向零。

驗算

- 只回答一次「左」之後，似然（likelihood）分別是 $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$（已知 L）和 $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$（已知 R），所以 $\mathrm{P}(L \mid \text{左}) = \frac{33}{64}$。數列 $\frac{33}{64} \approx 0.516$、$\frac{99}{190} \approx 0.521$、$\frac{297}{628} \approx 0.473$ 先升後跌，與上面的解釋吻合。
- 回答次數很多時，$\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$，因為 Biscii 族人的一項佔主導。
- 我們以分數作精確窮舉，並模擬了 10^6 次對話，核對了全部四個概率：模擬所得的值是 0.5214（精確值 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$）和 0.5266（精確值 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$）。

常見錯誤

- 忘記說明 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$ 這個假設。若對方向沒有任何先驗概率，這條問題便無法作答。
- 把第一部分的 $\frac{9}{10}$ 套用到整個族羣上。這個結果只適用於 Ascii 族人；Biscii 族人同樣會兩次給出相同的答案，而且每次都如此。
- 以為不論土著是哪一族人，他的三個答案都是獨立的。只有在知道他屬於哪一族（以及真正的方向）之後，這些答案才是獨立的，這就是我們要先取條件的原因。

STEP 之外

這個計算是貝葉斯更新（Bayesian updating）的一個例子：比值 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$ 稱為似然比（likelihood ratio）或貝葉斯因子（Bayes factor），用來量度證據有多支持其中一個假設。由於土著屬於哪一族是所有答案共有的隱藏變量（hidden variable），這些答案只是條件獨立（conditionally independent），看似指向一方的證據，最終可能指向另一方。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）對條件概率以及正是這一類的悖論有非常出色的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。