詳細解答

STEP I 1993，第 14 題

概率與統計 • 指數分佈的等候時間

STEP I 1993，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s1-q14

關鍵思路

重要的不是蟾蜍先生的速率，而是他走完最後一公里所需的時間 T，而 $T = 1/V$。V 的密度函數看來不好處理，但它的累積分佈函數（cumulative distribution function）卻非常簡單；把它轉化為關於 T 的敘述，便可看出 T 服從參數為 α 的指數分佈（exponential distribution）。此後，每個綠燈時段的概率都是兩個指數函數之差，而把所有綠燈時段加起來，就得到一個等比級數（geometric series）。

解答

到達時間的分佈

設 V 為速率，單位為公里每分鐘，並設 $T = 1/V$ 為他到達交通燈的時間，以分鐘為單位，由交通燈轉綠的一刻起計。留意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{e}^{-\alpha/v} = \alpha v^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/v},$$

以及當 $v \to 0^+$ 時 $\mathrm{e}^{-\alpha/v} \to 0$，可知 V 的分佈函數為

$$\mathrm{P}(V \le v) = \int_0^v \alpha u^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\alpha/v} \qquad (v > 0).$$

（當 $v \to \infty$ 時它趨向 1，所以這確實是一個密度函數。）由於 $V > 0$，對 $t > 0$ 我們有 $T > t \iff 1/V > t \iff V < 1/t$，所以

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}\left(V < \tfrac{1}{t}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

因此 T 服從參數為 α 的指數分佈。

想一想 為甚麼要用 T 而不用 V 來計算？

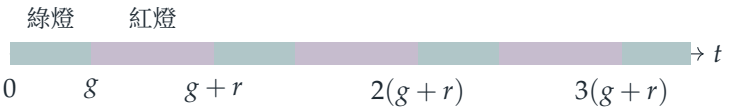
交通燈是以時間來描述的，所以我們關心的每個事件，都是 T 的取值所在的一個區間。若要直接把 V 的密度函數換算成 T 的密度函數，便須作變數代換（change of variable）；改為經由 $\mathrm{P}(T > t)$ 入手，則可避開這一步，一行便得出答案。

一個綠燈時段

在時間 0，交通燈轉為綠燈。綠燈時段為 $[0, g)$，紅燈時段為 $[g, g+r)$，然後綠燈時段為 $[g+r, (g+r)+g)$，如此類推。第 $(n+1)$ 個綠燈時段是 $n(g+r) \le t < n(g+r)+g$。由於 T 是連續的，是否包括端點並無分別，而

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(n(g+r) < T < n(g+r)+g) &= \mathrm{P}(T > n(g+r)) - \mathrm{P}(T > n(g+r)+g)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha(n(g+r)+g)},\end{aligned}$$

正如題目所求。（原試卷把第二個指數中的右括號印錯了位置；該指數應為 $-\alpha(n(g+r)+g)$，如上所示。）以上推算對 $n = 0$ 同樣成立，那就是第一個綠燈時段，此時交通燈還未曾轉過紅燈。



遇上綠燈的概率

他在綠燈時通過，當且僅當 T 落在其中一個綠燈時段之內。這些時段互不相交（disjoint），所以我們把它們的概率相加，包括 $n = 0$：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)}\mathrm{e}^{-\alpha g}\right) = (1-\mathrm{e}^{-\alpha g})\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)})^n\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha g}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}},\end{aligned}$$

這裏求了等比級數之和；該級數收斂（converges），因為 $0 < \mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} < 1$（由於 $\alpha > 0$ 及 $g+r > 0$）。

極限

當 $\alpha \to \infty$ 時，$\mathrm{e}^{-\alpha g} \to 0$ 和 $\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} \to 0$ 同時成立（因為 $g > 0, g+r > 0$），所以

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

這是合理的：α 很大表示蟾蜍先生開得非常快，幾乎每次都能在第一個綠燈時段結束前通過。

當 $\alpha \to 0$ 時，分子和分母都趨向 0，所以要更小心處理。在分子和分母中分別寫成 $1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - 1)$：

$$\mathrm{P}(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha g}\,(\mathrm{e}^{\alpha g} - 1)}{\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\,(\mathrm{e}^{\alpha(g+r)} - 1)} = \mathrm{e}^{\alpha r} \cdot \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha g} - 1}{\alpha g}}{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha(g+r)} - 1}{\alpha(g+r)}} \cdot \frac{g}{g+r},$$

其中我們把分子和分母同除以 α，並補上因子 g 和 $g+r$。當 $\alpha \to 0$ 時，$\mathrm{e}^{\alpha r} \to 1$，而且 $\alpha g \to 0$ 和 $\alpha(g+r) \to 0$ 同時成立，所以由 $(\mathrm{e}^{x} - 1)/x \to 1$ 可知兩個分式各自趨向 1。因此

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{g}{r+g} \qquad \text{當} \alpha \to 0.$$

這時蟾蜍先生開得非常慢，他的到達時間分散在很多個週期之中，所以遇上綠燈的機會就只是每個週期中綠燈所佔的比例。

驗算

- 取 $\alpha = 0.7, g = 1, r = 2$，公式給出 $\mathrm{P}(\alpha) \approx 0.5737$。模擬 4×10^5 次車程，以求 $\mathrm{e}^{-\alpha/v}$ 的反函數的方法對 V 抽樣，結果為 0.5744，而 $n = 0, 1, 2$ 各個綠燈時段的概率亦一一吻合。
- 取 $g = 1, r = 2$：$\mathrm{P}(10^{-4}) \approx 0.33337$，接近 $\frac{1}{3}$，而 $\mathrm{P}(10) \approx 0.99995$。
- 若 $r = 0$，交通燈永遠是綠燈，而公式對每個 α 都給出 $\mathrm{P}(\alpha) = 1$，正該如此。

常見錯誤

- 漏掉 $n = 0$。第一個綠燈時段在任何紅燈之前，所佔的概率最大。
- 照抄試卷上印的指數 $-\alpha(n(g+r)) + g$，那是 $-\alpha\big(n(g+r) + g\big)$ 的誤印。
- 把 V 本身當作到達時間，或者嘗試求 $\mathrm{E}(T)$。事實上這裏的 $\mathrm{E}(V)$ 是無限大，但題目完全用不着它。

STEP 之外

透過分佈函數把 V 的分佈轉化為 $T = g(V)$ 的分佈，是變換隨機變量（random variable）的標準方法。這裏 V 服從逆指數分佈（inverse-exponential distribution）。極限 $\alpha \to 0$ 是

一個普遍想法的小例子：一個分散在許多個週期之中的隨機時間，落在各個階段的機會與該階段的長度成正比，這正是更新理論（renewal theory）的起點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對隨機變量的變換和指數分佈都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。