詳細解答

STEP I 1993，第 13 題

力學 • 功與功率

STEP I 1993，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

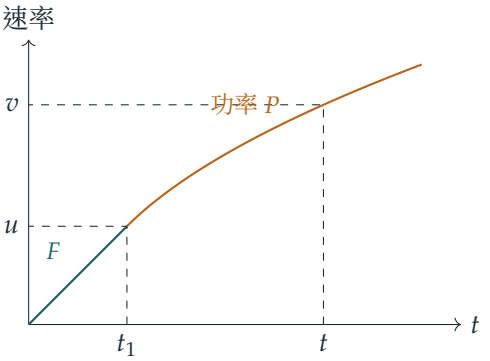
step.maths.org/questions/93-s1-q13

關鍵思路

運動分為兩個階段，每個階段要用牛頓第二定律（Newton's second law）的不同形式。當力恆定時，加速度也恆定，所以 *suvat* 方程已足以解決一切。引擎一旦改以恆定功率（constant power）運作，驅動力便是 P/v，它會隨速率而改變；訣竅是把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（用來求時間）或 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$（用來求距離），使變數得以分離。

解答

把機車和列車合起來看成一個質量為 M 的質點（particle），沿筆直的水平路軌運動，且不受阻力。水平方向唯一的力是牽引力（tractive force）（重力和法向反作用力（normal reaction）都是垂直方向的，互相抵消）。下圖是速率對時間的草圖：先是一條直線，升至速率 u，然後是一條曲線，其斜率隨速率上升而下降。



第一階段：恆力

力恆為 F 時，加速度是 F/M。由靜止出發，速率達到 u 的時刻是

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

這裏用了 $F = P/u$。由 $v^2 = u^2 + 2as$（這裏速率由 0 增至 u），所走的距離是

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

第二階段：恆定功率

功率等於力乘以速度，所以速率為 w 時，牽引力是 P/w。留意當 $w = u$ 時，這個力是 $P/u = F$，所以引擎轉換模式時，力不會突然跳變。由牛頓第二定律得

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

時間。 分離變數（separating the variables），得 $Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$。由速率 u、時刻 t_1 積分至速率 v、時刻 t，

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

（這其實就是功能原理（work–energy principle）：引擎所作的功是 $P(t - t_1)$，全部轉化為動能（kinetic energy））所以

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

正是所求。由於 $v \geq u$，速率 v 是在第二階段之中（或剛好在其開始的一刻）達到的，所以我們可以使用第二階段的方程。

想一想 求距離時，自變數應該是 x，而不是 t。我們應怎樣改寫加速度？

由連鎖律（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$。於是運動方程變成

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{即} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

距離。 由 $w = u$ 積分至 $w = v$，第二階段所走的距離 s_2 滿足

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P\,s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

因此總距離是

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

試卷上的一處誤印。 試卷印出的答案把 u^3 寫成了 u^2。這不可能是對的：Mv^3/P 是長度（功率的單位是 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$，而 Mv^3 的單位是 $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$），但 Mu^2/P 卻是時間，所以含 u 的一項也必須是三次方，兩項才可以相加。正確的距離是 $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$，也就是我們上面證明了的結果。

驗算

- 取 $v = u$：時間公式給出 $Mu^2/P = Mu/F$，距離公式給出 $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$，正好是第一階段的結果，理應如此。
- 單位：Mv^2/P 是能量除以功率，即時間；Mv^3/P 是長度。誤印正是這樣露出馬腳的。
- 取 $M = F = u = 1$（於是 $P = 1$）及 $v = 2$，公式給出 $t = 2.5$，距離為 $17/6 \approx 2.833$。以數值方法逐步模擬這個運動（速率低於某值時力為 F，該值就是 u，高於它時力為 P/w），所得的兩個數值都與上述相同；而且對隨機選取的 M、F、u 和 $v \geq u$，數值結果與公式的誤差小於 10^{-7}；試卷上印有 u^2 的版本則並不吻合。

常見錯誤

- 忘記第一階段，直接由靜止開始對恆定功率的方程積分。第二階段的方程只在 $w \geq u$ 時才成立；若由 $w = 0$ 開始使用，就等於說力是無限大。
- 對 x 積分時卻用了 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$：求距離時，加速度必須寫成 $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。
- 把第一階段的時間寫成 u/F：加速度是 F/M，不是 F。

STEP 之外

恆定功率階段是一條一階微分方程（first-order differential equation），以分離變數法求解；而把自變數由 t 換成 x，正是一般能量方法所用的同一訣竅：$w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 積分後得出動能，由此引出功能定理（work–energy theorem），再往後就是位勢（potentials）和守

恆量（conserved quantities）。低速時力設有上限，也正是現實中牽引的運作方式，因為功率固定的摩打在靜止時不可能提供無限大的力。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是循這個思路闡述功、能量和功率。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。