詳細解答

STEP I 1993，第 12 題

力學 • 拋體的攔截

STEP I 1993，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s1-q12

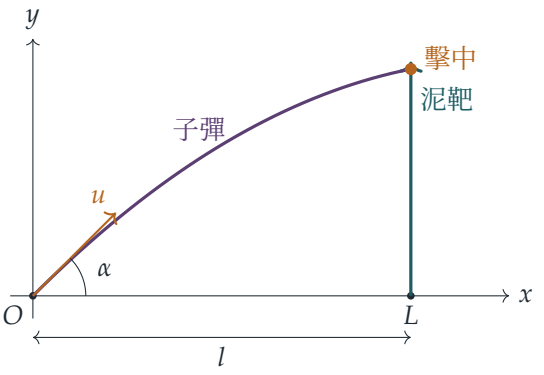
關鍵思路

擊中的意思是子彈與泥靶在同一時刻位於同一位置。子彈到達通過發射器的鉛垂線的時刻，只由它的水平運動決定，所以我們先求出這個時刻，再令兩者的高度相等。在子彈飛行期間，重力把兩個物體向下拉的距離完全相同，都是 $\frac{1}{2}gt^2$，因此這一項互相抵消，剩下一個簡潔的線性條件。當 $T = 0$ 時，這個抵消更讓我們可以用一個巧妙的角度看通整道題。

解答

模型

我們把泥靶和子彈都看成只在重力作用下自由運動的質點 (particle)，不計空氣阻力 (air resistance)，並假設參賽者在包含發射器的鉛垂平面內朝發射器的方向射擊。把參賽者放在原點 O，x 軸水平指向位於 $x = l$ 的發射器 L，y 軸鉛垂向上。時間 t 由步槍發射的一刻起計，所以泥靶此時已在空中飛行了時間 T，而在時刻 t 它已飛行了 $T + t$。



擊中的條件

發射後的時刻 t，子彈位於

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而泥靶在時間 T 之前以速率 v 向上射出，此時位於 $x = l$，高度為

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

子彈只可能在直線 $x = l$ 上與泥靶相遇，而它到達該處時 $(u\cos\alpha)\,t = l$，即

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

（這裏 $\cos\alpha > 0$：由於 $l > 0$，槍口垂直向上的步槍永遠打不到發射器那邊。）要擊中，就需要在這一刻有 $y_B = y_C$。兩邊的 $-\frac{1}{2}gt^2$ 項互相抵消，所以

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

代入 $t = l/(u\cos\alpha)$ 得

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v - gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

再把全式乘以 $\cos\alpha$，

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v - gT}{u}\,l,$$

這就是所要求的結果。

$T = 0$ 的情況

當 $T = 0$ 時，條件變成 $l\sin\alpha = vl/u$，而由於 $l > 0$，

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

想一想 為甚麼這必然導致 $v < u$，而不只是 $v \le u$？

我們需要 $\sin\alpha \le 1$，所以 $v \le u$。但 $v = u$ 就需要 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，這時 $\cos\alpha = 0$：子彈從 O 垂直向上飛，永遠到不了直線 $x = l$。所以只有當 $v < u$ 時才可能擊中。這時

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

因為 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，故取正根，而擊中發生於

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

泥靶由 $t = 0$ 起在空中，直至 $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 再次成立為止，即直至 $t = 2v/g$。因此，要在它落地之前擊中它，就需要

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

其中我們乘上了正數 $\sqrt{u^2 - v^2}$。連同 $v < u$，這正是我們要證明的結論。

$T = 0$ 的情況有一個很漂亮的看法。當 $\sin\alpha = v/u$ 時，子彈速度的鉛垂分量是 $u\sin\alpha = v$，與泥靶的相同，而兩者所受的重力也一樣。所以子彈和泥靶*在每一瞬間都處於同一高度*，唯一的問題是：子彈的水平速率 $\sqrt{u^2 - v^2}$ 能否在泥靶落下之前走完距離 l。

驗算

- *無重力的極限情況。*若 $g = 0$ 且 $T = 0$，兩個物體都沿直線運動，而條件 $\sin\alpha = v/u$ 正是勻速攔截時常見的「提前量」瞄準條件。
- *最大射程。*對固定的 u，上界 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$ 在 $v = u/\sqrt{2}$ 時最大，其值為 u^2/g，即以速率 u 發射的拋體（projectile）的最大射程。這是合理的：當 $v = u/\sqrt{2}$ 時我們得到 $\alpha = 45°$，而擊中恰好發生在子彈本應落回地面的一刻。
- *數值。*取 $g = 9.8$、$v = 20$、$T = 0.7$、$u = 120$ 及 $l = 60$（國際單位制），用數值方法解出擊中所需的角度，得 $\alpha \approx 0.2987$ rad，而第一條恆等式的兩邊相符。把兩個運動按時間逐步推算，子彈到達發射器時，子彈和泥靶的高度都是 17.13 m。對於 $T = 0$、$v = 20$ 及 $u = 100$，上界約為 400 m，而 $\alpha \approx 11.5°$。

常見錯誤

- 對兩個物體使用同一個時間變量，卻沒有考慮延遲 T：泥靶的高度必須用 $T + t$ 計算。

- 忘記排除 $v = u$ 的情況，這時 $\alpha = 90°$，根本不可能擊中。
- 只檢查子彈能否到達發射器，卻沒有檢查那一刻泥靶是否仍在空中。

STEP 之外

$\frac{1}{2}gt^2$ 的抵消，其實是一個深刻思想的特例：在以加速度 g 自由下落的參考系（frame）中，重力消失了，每個拋體都以恆定速度沿直線運動。這是把伽利略相對性（Galilean relativity）應用於加速參考系，而到了愛因斯坦（Einstein）手中，它成為廣義相對論（general relativity）核心的等效原理（equivalence principle）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對相對運動和非慣性參考系（non-inertial frames）有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。