詳細解答

STEP I 1993，第 11 題

力學 • 質心

> **STEP I 1993，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

關鍵思路

一個剛體（rigid body）從一點自由懸掛時，只受兩個力作用：支承點的拉力和它本身的重量。兩個力要互相平衡，必須作用在同一直線上，所以質心（centre of mass）必定懸在支承點的正下方。因此，整個問題歸結為求出彎曲鐵線的質心 G，然後留意到：在兩個位置之間，物體轉過的角度正是直線 GA 與 GB 之間的夾角。

解答

質心

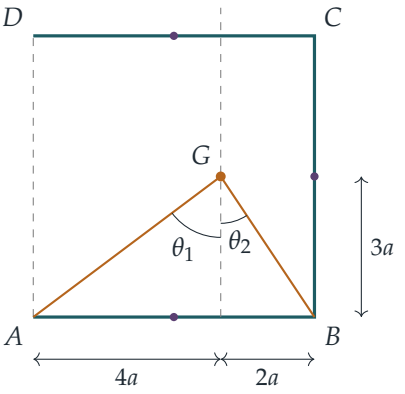
把鐵線看成一根均勻的剛性幼棒，彎成 AB、BC、CD 三條邊，每條邊的重量同為 W，並掛在一口光滑的釘上或一條輕繩上。為了使數字都是整數，取正方形的邊長為 $6a$，並在鐵線所在的平面上建立坐標軸，使得

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

每條邊都是均勻的幼棒，所以它的重量作用在中點：AB 的是 $(3a,0)$，BC 的是 $(6a,3a)$，CD 的是 $(3a,6a)$。三個重量相等，所以 G 就是三個中點的平均：

$$G = \left(\frac{3a+6a+3a}{3}, \frac{0+3a+6a}{3}\right) = (4a,\ 3a).$$

（鐵線對稱於通過 BC 和 AD 兩個中點的直線，因此 G 必定位於高度 $3a$ 處；需要計算的只有它的水平位置。）



圖中通過 G 的垂直虛線與 BC 平行（亦與缺少了的邊 AD 平行）。設 θ_1 為 GA 與這條虛線所成的角，θ_2 為 GB 在另一側與它所成的角。從圖中可以看出，

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

（事實上 $AG = 5a$：這是一個 3–4–5 三角形。）

先從 A 懸掛，再從 B 懸掛

當鐵線從 A 懸掛並處於平衡（equilibrium）時，作用在它上面的力只有 A 處的反作用力（reaction），以及作用在 G 的總重量 $3W$。要使兩者平衡，它們對 A 的力矩（moment）必須互相抵消，所以重量的作用線必須通過 A：直線 AG 是垂直的，而 G 在 A 的下方。由於 BC 與圖中的虛線平行，此時 BC 與垂直方向成 θ_1 的傾角。

同樣地，當鐵線從 B 懸掛時，直線 BG 是垂直的，而 BC 則向另一邊傾斜，與垂直方向成 θ_2 的傾角。

? **想一想** 為甚麼 BC 的兩個方向之間的夾角是 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $\theta_1 - \theta_2$？

從第一個位置轉到第二個位置時，鐵線是整體剛性地轉動的，所以它上面的每一條直線都轉過相同的角度。換一個說法：讓鐵線在紙上固定不動，改為讓「向下」的方向轉動。在第一個位置，向下的方向沿着 GA；在第二個位置，則沿着 GB。因此轉過的角度就是兩者之間的夾角 AGB。在圖中，A 和 B 分別位於通過 G 的虛線的兩側，所以

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

利用複角公式（addition formula），

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{2}{\frac{1}{9}} = 18.$$

θ_1 和 θ_2 都是銳角，所以 $0 < \theta_1 + \theta_2 < 180°$；又因為它的正切是正數，這個和其實是銳角。因此 BC 的兩個方向之間的夾角是 $\tan^{-1} 18$，正如題目所求。

驗算

- 以數值計算，$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53.13°$，$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 33.69°$，兩者相加得 $86.82°$，而 $\tan^{-1} 18 \approx 86.82°$ 亦然。
- 把鐵線換成 90 000 小段相等的部分，把它們的位置取平均而得 $G = (4a, 3a)$，然後每次把整個物體旋轉，使 G 位於支承點下方，所得 BC 的兩個像之間的夾角與上述結果相同，準確至小數點後九位。
- 檢查 G 是否合理：它較接近 BC，而離缺少了的邊 AD 較遠，這是理所當然的，因為右邊有一整條邊的鐵線，左邊卻完全沒有。

常見錯誤

- 把 G 取在正方形的中心 $(3a, 3a)$。如果四條邊齊全，這是對的；但邊 AD 並不存在，沒有東西把質心拉向左邊。
- 把兩個傾角相減而不是相加：從 A 懸掛時 BC 向一邊傾斜，從 B 懸掛時則向另一邊傾斜。

STEP 之外

「自由懸掛的物體靜止時，質心位於支承點的下方」這個原理，正是實際上找出不規則平面圖形質心的方法：把它先後從兩點懸掛，看看兩條鉛垂線在哪裏相交。在大學一年級的課程中，同一個想法會以勢能（potential energy）的形式出現：平衡位置就是 G 的高度的駐點（stationary point），而穩定的平衡位置就是最低的那一個。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）討論質心和剛體靜力學（statics），當中還有更多類似的例子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。