詳細解答

STEP I 1993，第 10 題

力學 • 涉及彈簧的平衡

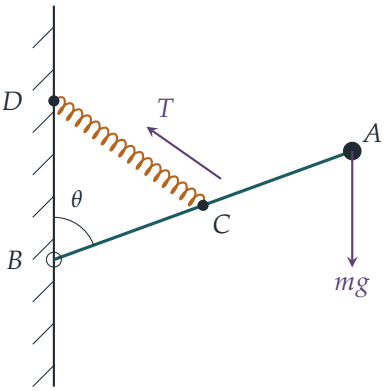
> **STEP I 1993，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q10

關鍵思路

對鉸鏈 B 取力矩（moments）：這樣可以完全消去 B 處未知的反作用力，只留下一條把彈簧張力與桿的角度聯繫起來的方程。這裏的幾何其實比表面看來容易處理，因為 $BD = BC = a$，所以三角形 BCD 是等腰三角形，當中每一個長度都可以用 B 處角度的一半來表示。

解答

我們把燈看成質點（particle），把桿看成輕而剛硬，把 B 處的鉸鏈（hinge）看成光滑，並把彈簧看成輕而且遵從胡克定律（Hooke's law）。設 $\theta = \angle DBA$，即桿與向上的鉛垂線 BD 之間的夾角。「離開牆壁」的意思是 $0 < \theta < \pi$：當 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 時，桿貼着牆壁。



彈簧的長度

由於 $BC = BD = a$，而兩者之間的夾角是 θ，三角形 BCD 是等腰三角形。由 B 向 CD 作垂線，這條垂線既平分角 θ，亦平分邊 CD，所以

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{由 } B \text{ 到直線 } CD \text{ 的距離} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

根據胡克定律，彈簧的張力（tension）為

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right),$$

其中 T 若為負數，即表示彈簧受壓縮並向外推。

對 B 取力矩

作用於「桿連燈」這個系統的力有：在 A 的重量 mg、在 C 沿 CD 方向的彈簧力 T，以及在 B 的反作用力（reaction），而後者對 B 沒有力矩。重量沿鉛垂方向作用，與牆壁的水平距離為 $2a\sin\theta$，它使桿向下轉動（令 θ 增大）。張力則把 C 拉向 D，使桿轉回牆壁的方向。要達至平衡（equilibrium），須有

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

當 $0 < \theta < \pi$ 時，我們有 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，所以可以把它約去：

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

特別地，$T > 0$：彈簧必定被拉長，這合乎常理，因為總要有東西把燈撐起來。

> **想一想** 現在我們有兩條關於 T 的表達式。把兩者相等會得到甚麼？所得的答案必須符合甚麼條件，才能描述桿的一個真實位置？

記 $s = \sin\frac{\theta}{2}$。把 T 的兩條表達式相等，

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)},$$

前提是 $\lambda \neq 2mg$（若 $\lambda = 2mg$，方程便變成 $0 = \lambda$，這是不可能的）。由於 $0 < \theta < \pi$，真實的位置需要滿足 $0 < s < 1$。

- 若 $\lambda < 2mg$，則 $s < 0$：無解。
- 若 $\lambda > 2mg$，則 $s > 0$，而且

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

所以當 $\lambda > 4mg$ 時，數值 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$ 嚴格介乎 0 與 1 之間，從而在 $\theta \in (0, \pi)$ 內恰好有一個角度使力矩平衡。（事實上 $s > \frac{1}{2}$，所以彈簧確實是被拉長的。）這時合力由 B 處的反作用力承受，所以燈可以離開牆壁懸掛而處於平衡，正如題目所要求。反過來說，若 $\lambda \le 4mg$，則沒有這樣的位置。

該角度為

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right),$$

或者等價地，由於 $\cos\theta = 1 - 2s^2$，

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}.$$

驗算

- 當 $\lambda \to \infty$ 時，彈簧無法伸長，所以 $CD \to a$，三角形 BCD 變成等邊三角形。公式給出 $s \to \frac{1}{2}$，所以 $\theta \to 60°$。✓
- 當 $\lambda \to 4mg$ 由上方趨近時，$s \to 1$ 而 $\theta \to 180°$：彈簧太弱，燈一直下沉，最後貼着牆壁懸掛。
- 取 $\lambda = 6mg$：$s = \frac{3}{4}$，$\cos\theta = -\frac{1}{8}$，所以 $\theta \approx 97.2°$。把這個角度代入完整的向量力矩方程（彈簧力由坐標計算），所得淨力矩為零。在 $0 < \theta < \pi$ 的範圍內對淨力矩作數值掃描，當 $\lambda > 4mg$ 時只找到一個根（例如 $\lambda = 5mg$ 時為 112.9°），而當 $\lambda \le 4mg$ 時則沒有根。

常見錯誤

- 以整條桿的長度 $2a$，而不是 a，來計算由 B 到彈簧力作用線的距離。垂直距離是 $a\cos\frac{\theta}{2}$。
- 分解力而不取力矩：這樣會引入 B 處反作用力的兩個未知分量，卻毫無得益。
- 忘記檢查 $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$，而條件 $\lambda > 4mg$ 正正是由此而來。

STEP 之外

這道題只問平衡是否存在。順理成章的下一個問題是：這個平衡是否穩定？輕輕一碰之後，擾動會逐漸消失還是愈來愈大？要回答這個問題，可以寫出勢能（potential energy）$V(\theta)$（重力勢能加彈性勢能），再考察 $V''(\theta)$ 在平衡位置的正負號；這個想法貫穿大學一年級的力學，其後更貫穿整個動力系統（dynamical systems）理論。Kleppner 與

Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對能量方法和穩定性有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。