詳細解答

STEP I 1993，第 1 題

純數學 • 骰子點數總和的計數

> **STEP I 1993，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

本題在 *Beyond STEP* 第 9.6 節奇怪的骰子中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/strange-dice.html

關鍵思路

每一面的顏色都不同，所以擲出某個總和的一種「方法」，就是從每顆骰子各選一面。若其中一顆骰子有 a_k 面標着 k，另一顆有 b_k 面，則擲出總和 n 的方法數目為

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

在第二部分，我們由最小的總和開始，順着往上讀表。每個新的總和只會帶來一兩個未見過的未知數，所以各個點數的面數會逐一被確定下來，我們只需排除途中出現的少數幾個分支。

解答

總和為 6 的情況

第一顆骰子的面數為 $a_1 = 1$、$a_2 = 2$、$a_3 = 2$、$a_6 = 1$。第二顆的面數為 $b_1 = 1$、$b_3 = 2$、$b_4 = 1$、$b_5 = 1$、$b_6 = 1$。要得到總和 6，第一顆骰子須擲出 1、2 或 3；若擲出 6，第二顆骰子便要有 0 才行。所以

$$N(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7,$$

這正是題目要求的七種方法。

找出新的編號方式

把兩顆骰子稱為 P 和 Q。設 P 有 a_k 面標着 k，Q 有 b_k 面，其中 $k = 1, \ldots, 6$。這些都是非負整數，並且

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

（作為簡單的核對，表中各項加起來是 $36 = 6 \times 6$。）

總和 2 和 3。 $N(2) = a_1 b_1 = 0$，所以兩顆骰子不可能同時有 1。但 $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$，所以總有一顆骰子有 1。把這顆骰子稱為 P。於是 $a_1 \geq 1$ 而 $b_1 = 0$，並且

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{所以} \qquad (a_1, b_2) = (2,1) \text{ 或 } (1,2).$$

$a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情況不可能成立。 由於 Q 沒有 1，$N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$，而由 $N(7) = 3$ 可得 $b_6 \leq 1$。在這個情況下，Q 有一面標着 2，我們來驗證它沒有 3 或 4：

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$，所以 $2b_3 \leq 1$，這迫使 $b_3 = 0$，繼而 $a_2 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$，所以 $b_4 = 0$ 而 $a_3 = 1$。

因此 Q 有一個 2，沒有 1、3 或 4，其餘五面都是 5 和 6：$b_5 + b_6 = 5$。由於 $b_6 \leq 1$，可得 $b_5 \geq 4$，於是

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

這與 $N(6) = 4$ 矛盾。所以這個情況不可能出現。

所以 $a_1 = 1$ 而 $b_2 = 2$。 現在我們順着表往上推，並記住 $b_1 = 0$。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$。由於 $2a_2$ 是偶數，$a_2 = 0$ 而 $b_3 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$。同理，$a_3 = 0$ 而 $b_4 = 1$。
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$。

到目前為止，Q 已確定了 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ 面，所以 $b_5 + b_6 = 2$。由 $b_5 = 4 - 2a_4$ 可知 b_5 是偶數，所以 $b_5 = 0$ 或 $b_5 = 2$。

> ? **想一想** 我們怎樣在 $b_5 = 0$ 與 $b_5 = 2$ 之間作出取捨？

我們利用下一個總和。P 沒有 2 或 3，而 Q 沒有 1，所以

$$N(7) = a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- 若 $b_5 = 0$，則 $a_4 = 2$ 而 $b_6 = 2$。這時 $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$，這是不可能的。

- 若 $b_5 = 2$，則 $a_4 = 1$ 而 $b_6 = 0$。這時由 $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$ 得 $a_5 = 1$。P 已確定了 $a_1 + a_4 + a_5 = 3$ 面，所以 $a_6 = 3$。

這個表已把一切都確定下來：

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

核對表中其餘各項。 我們只用了總和 2 至 7，所以仍須確認這個編號方式能給出其餘各項。取 $a_1 = a_4 = a_5 = 1$、$a_6 = 3$ 以及 $b_2 = 2$、$b_3 = b_4 = 1$、$b_5 = 2$：

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

以上全部與表相符。所以兩顆骰子的編號必定是 $1,4,5,6,6,6$ 和 $2,2,3,4,5,5$，而這個編號方式確實能給出該表。除了把兩顆骰子的名稱對調之外，這是唯一可行的編號方式。

驗算

- 畫出 $1,4,5,6,6,6$ 對 $2,2,3,4,5,5$ 的 6×6 總和方格表，數一數每個總和出現的次數。你應該得到 $0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0$。
- 用電腦搜尋以 1 至 6 為兩顆骰子編號的所有方式（每顆骰子有 462 個多重集（multi-set）），結果恰好只找到這一對，別無其他，這確認了解是唯一的。

常見錯誤

- 猜出一個符合該表的編號方式便停下來。題目要求的是推理，所以你需要證明該表迫使編號只能如此。
- 忘記了 $a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情況，或者沒有給出理由便把它排除。
- 由較小的總和確定了各點數的面數後，卻始終沒有核對總和 8 至 12。

STEP 之外

要把 $N(n)$ 包裝得簡潔俐落，可以用生成函數（generating function）。若 $p(x) = \sum a_k x^k$ 而 $q(x) = \sum b_k x^k$，則 $p(x)q(x)$ 中 x^n 的係數正好是 $N(n)$，所以這道題其實是要你把一

個給定的多項式（polynomial）因式分解成兩個具有特定形狀的因式。同樣的想法可以得出 *Sicherman* 骰子（Sicherman dice），即 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$，它們的總和分佈與兩顆普通骰子相同。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology* 是介紹這個方法的一本生動入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。