詳細解答

STEP III 1992，第 9 題

純數學 • 橢圓的極坐標方程

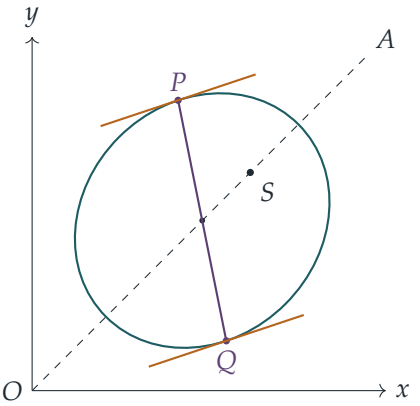
STEP III 1992，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q9

關鍵思路

極坐標（polar coordinates）以 S 為極點量度，始線沿 $y = x$ 的方向，因此極角為 θ 的點，從 S 看去在直角坐標（Cartesian coordinates）中的方向角是 $\theta + \frac{\pi}{4}$。把 x 和 y 寫成 θ 的函數再求導，便得到斜率（gradient）。至於第二部分，直徑（diameter）真正用得上的性質，是橢圓（ellipse）關於其中心對稱：直徑兩端的切線（tangent）互相平行。於是我們令兩個斜率相等，餘下的工夫交給半角三角公式便可。



在草圖中（$e = \frac{1}{2}$），PQ 是通過中心的直徑，而 P 和 Q 處的切線互相平行。

解答

切線的斜率

由於 S 位於第一象限內的直線 $y = x$ 上，設 S 為點 (s, s)，其中 $s > 0$。沿 SA 方向的單位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，與 x 軸成 $\frac{\pi}{4}$ 角。所以，以 S 為極點、極坐標為 (r,θ) 的點是

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{其中} \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

在 E 上有 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

以 r' 表示 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，並利用 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

我們只關心兩者之比，所以把兩式同乘以正數 $(1 + e\cos\theta)/r$：

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

這是因為 $\theta - \phi = -\frac{\pi}{4}$。現在 $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$，而 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)$。全式乘以 $\sqrt{2}$，可知在 $\theta = \alpha$ 處的一個切向量（tangent vector）是

$$\mathbf{d}(\alpha) = (-(\sin\alpha + \cos\alpha + e),\ \cos\alpha - \sin\alpha + e). \qquad (*)$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + e}{-(\sin\alpha + \cos\alpha + e)} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - e}{\sin\alpha + \cos\alpha + e},$$

正是所求。（當 $\sin\alpha + \cos\alpha + e = 0$ 時，切線是鉛垂的；$(*)$ 在該處依然成立。）

直徑的兩端

> **想一想** 我們還未求出中心，怎樣才能把「PQ 通過中心」化為一條關於 α 和 β 的方程？

我們利用第一部分的結果。橢圓繞其中心 C 旋轉半周（half-turn）後與自身重合。若 P 和 Q 是一條直徑的兩端，這個半周旋轉會把兩點互換，並把 P 處的切線映射到 Q 處的切線。半周旋轉把每條直線都變成與之平行的直線，所以*P 和 Q 處的切線互相平行。*

因此，設 P 處 $\theta = \alpha$，Q 處 $\theta = \beta$，則由 $(*)$ 得出的向量 $\mathbf{d}(\alpha)$ 和 $\mathbf{d}(\beta)$ 互相平行。用向量而不用斜率來處理，即使切線是鉛垂的，我們也永遠不會除以零。記 $s_\alpha = \sin\alpha$，$c_\alpha = \cos\alpha$，餘此類推。平行的條件是

$$(s_\alpha + c_\alpha + e)(c_\beta - s_\beta + e) = (s_\beta + c_\beta + e)(c_\alpha - s_\alpha + e).$$

展開後，$c_\alpha c_\beta$、$-s_\alpha s_\beta$、ec_α、ec_β 和 e^2 各項在等號兩邊都出現，互相抵消，剩下

$$s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta + es_\alpha - es_\beta = s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha + es_\beta - es_\alpha,$$

亦即

$$\sin(\alpha-\beta) + e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

現在利用 $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 和 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$：

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

想一想 我們可以約去 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 嗎？

可以。P 和 Q 是不同的點，所以 α 與 β 之差不是 2π 的倍數，故 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$。因此

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

以 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\beta}{2}$ 展開：

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.$$

除以 $(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$（因為 E 是橢圓，所以這裏 $1-e>0$），得

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2} = -\frac{1+e}{1-e},$$

正是所求。除非 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 或 $\cos\frac{\beta}{2}$ 等於零，否則這一步除法是成立的。假如（例如）$\alpha=\pi$，方程便迫使 $\sin\frac{\beta}{2}=0$，所以 $\beta=0$。這條直徑就是沿 OSA 的長軸（major axis），此時兩個正切之積沒有定義。其餘每一條直徑都滿足這個結果。

驗算

- 在 $\alpha=0$（較接近 S 的頂點）處，公式給出斜率 $\frac{-1-e}{1+e} = -1$。這是對的：長軸端點處的切線與 $y=x$ 垂直。
- 當 $e=\frac{1}{2}$ 時，乘積應為 -3。取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，則 $\tan\frac{\alpha}{2}=1$。於是 $\tan\frac{\beta}{2}=-3$，所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ 而 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$。由 $(*)$ 得 $\mathbf{d}(\alpha)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ 和 $\mathbf{d}(\beta)=(\frac{9}{10},\frac{3}{10})$，兩者互相平行。✓
- 數值上，隨機選取 2000 組 ℓ、e、S 和 α，斜率公式都與以有限差分（finite difference）計算的導數吻合；而把 P 對中心（位於從 S 沿 AS 方向距離 $\ell e/(1-e^2)$ 之處）作反射，所得的點 Q 在 E 上，其 β 滿足該恆等式，誤差在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 忘記了 $\frac{\pi}{4}$ 的旋轉而使用 $x = r\cos\theta$，這樣得出的是另一個坐標系中的斜率，並不是題目所求。
- 除以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 而沒有說明它為何不等於零。
- 試圖先求出中心，再直接加上「C 是 PQ 的中點」這個條件。這樣做是行得通的，但遠比利用平行切線繁複。

STEP 之外

直徑兩端的切線互相平行，屬於共軛直徑（conjugate diameters）理論的一部分：一族平行弦的中點都落在同一條直徑上，而該直徑兩端的切線與這些弦平行。在一個把橢圓變成圓的仿射映射（affine map）之下，這一切都化為初等的圓幾何，這正是仿射幾何和射影幾何（projective geometry）如此強大的原因之一。這裏的半角正切，也是天體力學中描述軌道時所用的標準參數化（parametrisation）。想在大學一年級的程度踏入這門幾何，不妨一讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》），或 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題集》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。