詳細解答

STEP III 1992，第 8 題

純數學 • 以方程的根求三角函數之和

STEP III 1992，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q8

關鍵思路

棣美弗定理（De Moivre's theorem）把 $\sin(2n+1)\theta$ 化為 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多項式，再除以 $\sin^{2n+1}\theta$，便得到一個 $\cot^2\theta$ 的多項式。角 $k\pi/(2n+1)$ 令左邊等於零，所以它們的餘切平方就是一個已知多項式的根。只要知道了全部的根，那三個和其實不過是韋達定理（Vieta's formulas，即根之和與根的倒數之和）換了個樣子而已。

解答

恆等式

設 $c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ 及 $N=2n+1$。由棣美弗定理和二項式定理(binomial theorem)，

$$\cos N\theta+\mathrm{i}\sin N\theta=(c+\mathrm{i}s)^N=\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

虛數項就是 j 為奇數的那些項。設 $j=2m+1$，則 $\mathrm{i}^{2m+1}=\mathrm{i}(-1)^m$，所以

$$\sin N\theta=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

現在以 $r=n-m$ 把求和的次序倒轉。這時 $2m+1=2n+1-2r$，而由二項式係數（binomial coefficients）的對稱性，$\binom{2n+1}{2n+1-2r}=\binom{2n+1}{2r}$。因此

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\&=\sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

當中抽出了 s^{2n+1}，並用了 $c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$。只要 $\sin\theta \neq 0$，此式便成立，正如題目所求。

多項式的根

設

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} x^r,$$

並對 $k = 1, \ldots, n$ 取 $\theta_k = k\pi/(2n+1)$。於是 $(2n+1)\theta_k = k\pi$，所以 $\sin(2n+1)\theta_k = 0$，而 $0 < \theta_k < \pi/2$ 則保證 $\sin\theta_k \neq 0$。把恆等式除以 $\sin^{2n+1}\theta_k$，再乘以 $(-1)^n$，得

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} \cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{即} \qquad p(\cot^2\theta_k) = 0.$$

想一想 我們怎樣知道這些就是全部的根？下面的求和全靠這一點。

角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ 全都位於 $(0, \pi/2)$ 之內，而 cot 在這個區間上為正，並且嚴格遞減（strictly decreasing）。所以這 n 個數 $\cot^2\theta_k$ 互不相同。p 的首項係數（leading coefficient）是 $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$，所以 p 的次數恰好是 n，因而最多有 n 個根。由此可知，$p(x) = 0$ 的根恰好就是 $\cot^2\theta_k$（$k = 1, \ldots, n$），而且每個都是單根（simple root）。

我們需要的係數是

$$[x^n]:\ (-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1),$$
$$[x^{n-1}]:\ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} = (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},$$
$$[x^1]:\ -\binom{2n+1}{2} = -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.$$

第 (i) 部分

根之和等於 x^{n-1} 與 x^n 的係數之比的相反數：

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

第 (ii) 部分

由於 $\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$，我們要求的是各根 x_k 的倒數之和。這些根全都不是零（常數項是 1），而

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

根據韋達定理，其分子和分母分別是 $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$ 和 $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$。兩者之比是 $-[x^1]/[x^0]$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\theta_k=-\frac{-n(2n+1)}{1}=n(2n+1).$$

（換個說法：倒數 $1/x_k$ 是 $x^n p(1/x)$ 的根，也就是把係數次序倒轉後所得的多項式的根，我們只須讀出它的根之和。）

第 (iii) 部分

利用 $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ 和第 (i) 部分，

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}^2\theta_k=n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{3n+2n^2-n}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

驗算

當 $n=1$ 時，多項式是 $1-3x$，它的根是 $\frac{1}{3}=\cot^2(\pi/3)$。這時 (i) 給出 $\frac{1}{3}$，(ii) 給出 $3=\tan^2(\pi/3)$，(iii) 給出 $\frac{4}{3}=\operatorname{cosec}^2(\pi/3)$，全部正確。當 $n=3$ 時，各角是 $\pi/7,2\pi/7,3\pi/7$，用計算機算得三個和分別是 5、21 和 8，與 $\frac{3\cdot5}{3}$、$3\cdot7$ 和 $\frac{2\cdot3\cdot4}{3}$ 吻合。我們還以數值方法，就隨機選取的 θ 和 n 驗證了恆等式，並就 $n\le29$ 驗證了全部三個和。

常見錯誤

- 忘記論證各個 $\cot^2\theta_k$ 互不相同，以及 p 的次數恰好是 n。缺了這一步，便不能把韋達定理用在 $\cot^2\theta_k$ 上。
- 係數的正負號出錯：因子 $(-1)^n$ 在第 (i) 部分會約去，但前提是兩個係數都帶有這個因子。
- 把 k 一直取到 $2n$：當 $k>n$ 時，角 $k\pi/(2n+1)$ 只會重複相同的 $\cot^2$ 值，所以只有 $k\le n$ 才給出互不相同的根。

STEP 之外

把第 (iii) 部分與 $0<\theta<\pi/2$ 時成立的不等式 $\cot^2\theta<1/\theta^2<\operatorname{cosec}^2\theta$ 結合起來，便可把 $\sum_{k=1}^{n}1/k^2$ 夾在這裏求得的兩個和的倍數之間。令 $n\to\infty$，就得到歐拉（Euler）的著名結果 $\sum 1/k^2=\pi^2/6$；這是一個漂亮的初等證明，大學一年級的分析（analysis）課

程經常介紹。從多項式的係數讀出各種和，這個想法同樣是對稱函數（symmetric functions）和牛頓恆等式（Newton's identities）的基礎。分析方面，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。