詳細解答

STEP III 1992，第 7 題

純數學 • 向量幾何

STEP III 1992，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q7

關鍵思路

題目中的一切都由平行四邊形（parallelogram）以及按給定比例分割各邊的點構成，而這正是位置向量（position vector）最擅長處理的情況。把原點設在 A，並用兩個邊向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示每一個點。然後求出其中兩條直線的交點，再驗證這個點位於第三條直線上。

解答

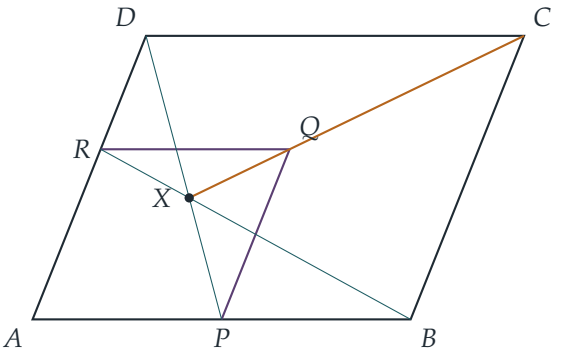
取 A 為原點，並設 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$，$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$。由於 $ABCD$ 是一個真正的平行四邊形，這兩個向量並不平行。因此平面上每一點都可以寫成 $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$，其中實數對 (λ, μ) 恰好只有一組，於是我們可以比較係數（compare coefficients）。

由於 $ABCD$ 是平行四邊形，C 的位置向量是 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$。因為 P 在邊 AB 上，而 R 在邊 AD 上，我們可以寫成

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

由於 $APQR$ 是平行四邊形，$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$，所以

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$



BR 與 DP 的交點

直線 BR 上的一般點是

$$\mathbf{b} + s(r\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (1 - s)\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d},$$

而直線 DP 上的一般點是

$$\mathbf{d} + t(p\mathbf{b} - \mathbf{d}) = tp\,\mathbf{b} + (1 - t)\,\mathbf{d}.$$

在公共點上，$\mathbf{b}$ 的係數和 $\mathbf{d}$ 的係數必須分別相等：

$$1 - s = tp, \qquad sr = 1 - t.$$

把 $s = 1 - tp$ 代入第二條方程，得 $r - rpt = 1 - t$，所以 $t(1 - pr) = 1 - r$。

> ? **想一想** 我們可以除以 $1 - pr$ 嗎？

由於 $0 \le p, r \le 1$，只有當 $p = r = 1$ 時才有 $pr = 1$，即 $P = B$ 且 $R = D$ 的情況。這時 $Q = C$，「直線」CQ 沒有定義，也就沒有甚麼需要證明。因此我們排除這個情況，於是 $1 - pr > 0$。這亦說明 BR 與 DP 並不平行，所以它們恰好相交於一點。於是

$$t = \frac{1 - r}{1 - pr}, \qquad s = 1 - tp = \frac{1 - pr - p + pr}{1 - pr} = \frac{1 - p}{1 - pr},$$

而交點 X 是

$$\mathbf{x} = tp\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d} = \frac{p(1 - r)\,\mathbf{b} + r(1 - p)\,\mathbf{d}}{1 - pr}.$$

X 位於 CQ 上

直線 CQ 上的一般點是

$$\mathbf{c} + u(\mathbf{q} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + u((p - 1)\mathbf{b} + (r - 1)\mathbf{d}) = (1 - u(1 - p))\mathbf{b} + (1 - u(1 - r))\mathbf{d}.$$

試取 $u = \dfrac{1}{1-pr}$。**b** 的係數變成

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

而 **d** 的係數變成

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

這正好就是 **x** 的係數。所以 X 也位於 CQ 上，三條直線 BR、CQ 和 DP 都通過 X。它們交於一點，正如所求。 ■

（當中的對稱性令人放心：把 B, P, p 與 D, R, r 的角色互換，BR 與 DP 便會互換，CQ 保持不變，而 **x** 的公式亦不變。）

驗算

- 若 $P = A$（$p = 0$），則 $Q = R$，而 $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$，即是 R。事實上，DP 就是直線 DA，它與 BR 交於 R；而 CQ 就是 CR，它通過 R。
- 若 P 和 R 分別是 AB 和 AD 的中點，則 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$，位於由 A 到 C 的三分之一處。這是三角形 ABD 的形心（centroid），理應如此，因為 BR 和 DP 是它的其中兩條中線（median）。
- 我們隨機選取了 5000 個平行四邊形以及 P 和 R 的隨機位置，用分數精確地檢驗了共點性（concurrency）。每一個情況都與 **x** 的公式吻合。

常見錯誤

- 忘記了正因為 **b** 與 **d** 不平行，才可以比較這兩個係數。
- 兩條不同的直線用了同一個參數。每條直線都需要有自己的參數（s、t、u）。
- 沒有提及退化情況（degenerate case）$P = B$、$R = D$，這時 $Q = C$，直線 CQ 沒有定義。

STEP 之外

留意整個解答從未用過長度或角度，只用了平行線和直線上的比例。因此這個結果屬於仿射幾何（affine geometry）：仿射映射（affine map，即先作線性映射、再作平移）可以把任何平行四邊形變成正方形，同時保持共點性，所以只需就正方形證明這個結果便已足夠。關於直線相交的問題在射影幾何（projective geometry）中也十分自然，塞瓦

（Ceva）定理和笛沙格（Desargues）定理等都屬於這個範疇。如想廣泛而輕鬆地遊覽這些概念，可參閱考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（幾何學入門），或 Brannan、Esplen 與 Gray 的 *Geometry*（幾何學）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。