詳細解答

STEP III 1992，第 6 題

純數學 • 三角函數歸約公式

> **STEP III 1992，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

關鍵思路

兩個化簡都建基於同一做法：把三角函數之差化為含有因子 $\sin x$ 的乘積，從而約去礙事的分母。對 I_n 而言，所用的工具是 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$；對 J_n 而言，則是 $\sin P - \sin Q$ 的和差化積公式（sum-to-product formula）。分母一旦消去，餘下的只是初等積分，而兩條遞推公式（reduction formula）亦可裂項相消（telescope）。

解答

先談談被積函數（integrand）。兩者的分母都有 $\sin x$，它在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 處為零，但這些奇點是可去奇點（removable singularity）：由於當 $x \to 0$ 時 $\sin(nx)/\sin x \to n$，而當 $x \to \pi$ 時 $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$，兩個被積函數都保持有界。因此下文所有積分都是連續函數的普通積分。

關係式 $I_n - I_{n-1} = J_n$

利用 $\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$ 及和差化積公式，

$$\sin^2 A - \sin^2 B = (2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2})(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

取 $A = nx$ 及 $B = (n-1)x$，便得

$$\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \sin((2n-1)x)\sin x.$$

因此，對 $n \geq 1$，

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

正如所求。（當 $n = 1$ 時，我們把 I_0 理解為 $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$ 的積分，故 $I_0 = 0$。）

J_n 的遞推公式

現在比較 J_{n+1} 與 J_n。由和差化積公式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

於是 $\sin x$ 再次被約去：

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2nx)\Big]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

這是因為對整數 n 有 $\sin(2n\pi) = 0$ 及 $\cos(2n\pi) = 1$。因此遞推公式為

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

> **想一想** 一條說 $J_{n+1} = J_n$ 的遞推公式，看來簡單得令人起疑。這真的是答案嗎？

是的：式中出現的 $2\cos(2nx)$ 與 x 相乘後，在整數個週期上的積分為零，所以由一個 n 到下一個，數值毫無改變。要確定這個值，我們只需計算首項：

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

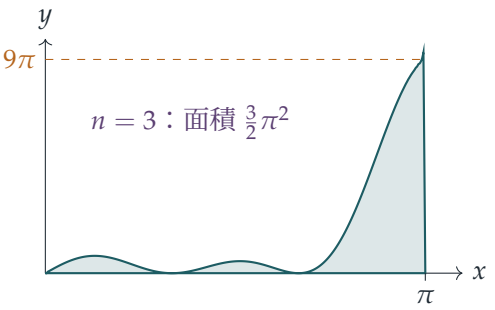
因此對每個正整數 n，都有 $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$。

C 之下的面積

由於在 $(0,\pi)$ 上 $x \geq 0$ 且 $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$，曲線永不低於 x 軸，所以 C 之下的面積正好是 I_n。把第一條關係式求和（各項裂項相消），並利用 $I_0 = 0$，

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

所以 C 之下的面積是 $\frac{1}{2}n\pi^2$，正如所求。



驗算

- $n = 1$：曲線是 $y = x$，而該三角形的面積是 $\frac{1}{2}\pi^2$。✓
- 對 $n = 1, \ldots, 8$ 的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），每次都得出 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$，又例如 $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$。
- 曲線在 $x = \pi$ 處升至 $y = n^2\pi$，但面積只隨 n 線性增長：各個峯愈來愈高，卻愈來愈窄（寬度約為 π/n），兩者並無矛盾。

常見錯誤

- 忘記了 $I_0 = 0$（或從未查看 I_0 的意思），以致裂項求和沒有起始值。
- 計算 $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 時弄錯正負號；較簡潔的做法是留意到邊界項為零，而餘下的 $\sin(2nx)$ 在 $[0, \pi]$ 上的積分亦為零。

STEP 之外

函數 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$ 除了相差一個因子 $1/n$ 之外，就是傅立葉分析（Fourier analysis）中的費耶核（*Fejér kernel*），而 $\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$ 基本上就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*）。你在這裏發現的事實，即它們的積分與 n 無關，而函數本身卻集中於區間的兩端，正是它們能用來證明傅立葉級數（Fourier series）收斂的原因。Stein 與 Shakarchi 的 *Fourier Analysis: An Introduction*（傅立葉分析入門）對此有精彩的闡述；至於實分析（real analysis）的背景知識，可參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門讀本）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。