詳細解答

STEP III 1992，第 5 題

純數學 • 三維向量幾何

> **STEP III 1992，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q5

關鍵思路

對稱性幾乎包辦了所有工作。以平面 $y+z=2$ 作反射(reflection)，四面體(tetrahedron)會映射到自身，而 A 和 D 保持不動，所以這個反射必定把 B 和 C 對調。由此可知 BC 垂直於該平面，而且它的中點（midpoint）N 位於該平面上。之後的一切都只是畢氏定理（Pythagoras）和純量積（scalar product），當中用到四個頂點與球心 Y 的距離全部相等這一事實。

解答

求 N 和半徑

我們有 $\overrightarrow{AY}=(3,-2,4)-(0,4,-2)=(3,-6,6)$，所以球面（sphere）的半徑（radius）是

$$YA=\sqrt{9+36+36}=9.$$

由於 $\overrightarrow{AY}=3\overrightarrow{YN}$，可得 $\overrightarrow{YN}=(1,-2,2)$，所以 $N=(4,-4,6)$ 而 $YN=3$。

留意 A、Y 和 N 全部滿足 $y+z=2$：三點都位於對稱平面（plane of symmetry）上。

為何 BC 垂直於該平面

設 Π 為平面 $y+z=2$。以 Π 作反射會把四面體映射到自身，所以它把各頂點重新排列(permute)。它固定 A 和 D，這兩點都在 Π 上。B 和 C 都不在 Π 上：假如其中一點在該平面上，反射便會固定這一點，於是也必須固定第四個頂點，結果四個頂點全部落在 Π 上，根本構不成四面體。因此反射把 B 和 C 對調，即是說 C 是 B 的鏡像。由此可知

- BC 垂直於 Π，所以它平行於法向量（normal）$(0,1,1)$；
- BC 的中點 N 位於 Π 上（與我們先前求得的結果吻合）。

想一想 為甚麼三角形 YNB 在 N 處成直角？

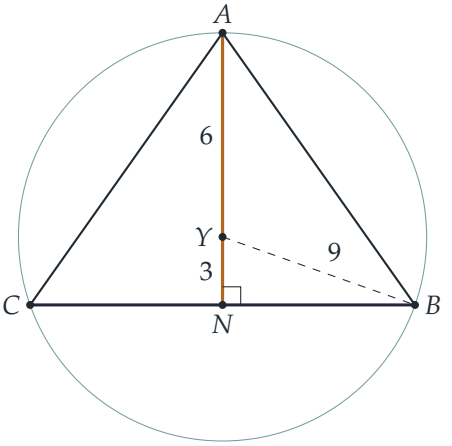
Y 和 N 都在 Π 上，所以 YN 是 Π 上的一條直線。但 NB 沿着 Π 的法線方向。法線垂直於平面上的每一條直線，所以 $\angle YNB = 90°$。

BN 與 B、C 的坐標

B 在球面上，所以 $YB = 9$。在三角形 YNB 中應用畢氏定理，

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{所以} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

正如題目所求。



上圖按比例繪出平面 ABC，該平面包含 Y（因為 Y 在 AN 上）。琥珀色的線段 AN 是它與 Π 相交之處；圓則是它截球面所得的截口。

沿 BC 方向的單位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$，所以

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

已知 $N = (4,-4,6)$，這條弦（chord）的兩個端點是 $(4,2,12)$ 和 $(4,-10,0)$。所以

$$B = (4,2,12),\ C = (4,-10,0) \qquad \text{或} \qquad B = (4,-10,0),\ C = (4,2,12).$$

驗算一下：$(4,2,12) - (3,-2,4) = (1,4,8)$ 的長度是 $\sqrt{1+16+64} = 9$，所以 B 確實在球面上。

D 的坐標

設 $\overrightarrow{YD} = (p, q, r)$。我們有三個條件。

- D 和 Y 都在 Π 上，所以 $\overrightarrow{YD}$ 垂直於法向量 $(0,1,1)$：$q + r = 0$。
- D 在球面上：$p^2 + q^2 + r^2 = 81$。
- 角度條件：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = YA \cdot YD \cos \angle AYD = 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 27$。

> **想一想** 三個未知數、三條方程，但其中一條是二次的。我們預期會有多少個解？

最多兩個，因為最後會得到一條二次方程。從幾何角度看，D 位於 Π 截球面所得的圓上（這是一個大圓（great circle），因為 $Y \in \Pi$），而該圓上與 YA 成指定角度的點，正是分處 A 兩側、互為鏡像的兩個位置。

利用 $\overrightarrow{YA} = (-3, 6, -6)$ 和 $r = -q$，角度條件給出

$$-3p + 6q + 6q = 27 \quad \Longrightarrow \quad p = 4q - 9.$$

代入球面方程，並利用 $r^2 = q^2$：

$$\begin{aligned} (4q-9)^2 + 2q^2 &= 81 \\ 18q^2 - 72q &= 0 \\ 18q(q-4) &= 0. \end{aligned}$$

- $q = 0$：這時 $p = -9$，$r = 0$，所以 $\overrightarrow{YD} = (-9, 0, 0)$，而 $D = (-6, -2, 4)$。
- $q = 4$：這時 $p = 7$，$r = -4$，所以 $\overrightarrow{YD} = (7, 4, -4)$，而 $D = (10, 2, 0)$。

兩者都給出真正的四面體：D 在 Π 上，但不在直線 AN 上（平面 ABC 只有這一部分落在 Π 內），所以 D 不在平面 ABC 上。因此

$$D = (-6, -2, 4) \qquad \text{或} \qquad D = (10, 2, 0).$$

驗算

- 每個 D 都滿足 $y + z = 2$，而且兩種情況下均有 $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$（分別是 81 和 $49 + 16 + 16$）。
- 對於 $D = (10, 2, 0)$：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = -21 + 24 + 24 = 27 = 81 \cdot \frac{1}{3}$。✓
- B 和 C 互為鏡像：把 (x, y, z) 以 $y + z = 2$ 作反射，得到 $(x, 2 - z, 2 - y)$，它把 $(4, 2, 12)$ 送到 $(4, -10, 0)$。

- 用電腦搜尋 Π 上坐標不超過 20 的所有整數點，找出位於球面上且滿足 $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$ 的點，結果恰好只有 $(-6,-2,4)$ 和 $(10,2,0)$。兩種情況下四面體的體積都是 $1728/6 = 288$，所以它並非扁平。

常見錯誤

- 求錯 N。$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$ 表示 Y 位於 AN 的四分之三處，所以 $N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$，而不是 $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$。
- 把 YN 或 AN 當作半徑。半徑是 $YA = 9$；$YN = 3$ 只是球心到弦 BC 的距離。
- 忘記 D 必須位於 Π 上。少了 $q + r = 0$ 這個條件，可能的點便有整整一個圓那麼多。

STEP 之外

「反射必定把 B 和 C 對調」這個論證，其實是羣論（group theory）的一小片段：一個圖形的對稱通過重新排列其頂點來作用，而反射的不動點（fixed point）必定位於鏡面上。這個反射本身就是線性代數中的映射 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$，是一個行列式（determinant）為 -1 的正交變換（orthogonal transformation）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 討論反射和正交矩陣（orthogonal matrix），而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 則闡述對稱羣（symmetry group）的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。