詳細解答

STEP III 1992，第 4 題

純數學 • 正交軌線

> **STEP III 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

關鍵思路

把 S_1 的每條曲線寫成 $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$：它是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x = a$ 和 $y = 1$，而且每一條都通過原點。要找出整個曲線族的微分方程（differential equation），先求導，再利用曲線本身的方程消去 a。兩條曲線正交，當且僅當它們的斜率（gradient）之積為 -1，因此把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 換成 $-1/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，就可以把 S_1 的方程變成 S_2 的方程，而後者可以分離變數（separation of variables）。

解答

S_1 的曲線

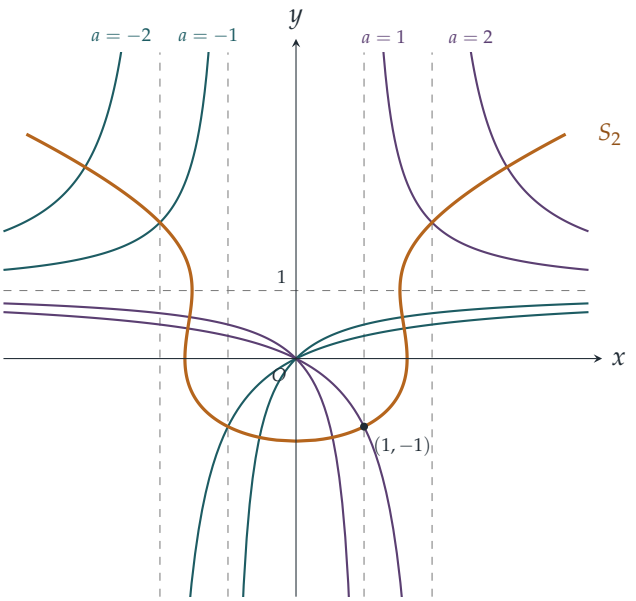
由於 $x = (x-a) + a$，

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

因此當 $a \neq 0$ 時，曲線是一條等軸雙曲線，鉛垂漸近線為 $x = a$，水平漸近線為 $y = 1$，並且通過原點。

- 若 $a > 0$，斜率恆為負。$x < a$ 的一支從 $y = 1$（當 $x \to -\infty$）向下走，經過 O，並在 $x \to a^-$ 時跌向 $-\infty$；$x > a$ 的一支則從 $+\infty$ 向下趨近 $y = 1$。
- 若 $a < 0$，斜率恆為正。$x > a$ 的一支從 $-\infty$ 上升，經過 O，趨近 $y = 1$；$x < a$ 的一支則位於 $y = 1$ 之上。

把 x 換成 $-x$，$\frac{x}{x-a}$ 就變成 $\frac{x}{x+a}$，所以對應 $-a$ 的曲線，是對應 a 的曲線沿 y 軸的反射。一個方便描繪的點：當 $x = \frac{3}{2}a$ 時，$y = 3$。



虛線是漸近線。琥珀色的曲線是 S_2 中通過 $(1,-1)$ 的那一條，它的形狀我們會在下文說明理由。

S_1 的微分方程

由 $y(x-a)=x$ 可得 $x-a=\dfrac{x}{y}$ 及 $a=x-\dfrac{x}{y}=\dfrac{x(y-1)}{y}$。（在 S_1 的曲線上，只有在原點才有 $y=0$，所以在該點以外我們可以除以 y。）代入斜率的式子，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{(x-a)^2}=-\frac{x(y-1)}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2}=-\frac{y(y-1)}{x},$$

所以 S_1 的每一條曲線都滿足

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(1-y).$$

S_2 的微分方程

兩條曲線正交，當且僅當它們在交點處的斜率之積為 -1。因此，若在某個公共點上 S_1 曲線的斜率為 p_1，S_2 曲線的斜率為 p_2，則 $p_1p_2=-1$，即 $p_1=-1/p_2$。

想一想 剛才求得的方程是關於 S_1 的。為甚麼它能告訴我們有關 S_2 的事情？

通過每一點 (x,y)（其中 $x,y\neq 0$）的 S_1 曲線恰好有一條，就是 $a=x(y-1)/y$ 的那一條，而它在該點的斜率為 $-y(y-1)/x$。通過同一點的 S_2 曲線，斜率必須是 $p_2=-1/p_1$，

所以在 S_2 上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{-y(y-1)/x} = \frac{x}{y(y-1)}, \qquad \text{即} \qquad x = y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

正如題目所求。

S_2 中通過 $(1,-1)$ 的曲線

這個方程可以分離變數：

$$\int (y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

在 $(1,-1)$：$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$，所以 $C = -\frac{4}{3}$。兩邊乘以 6，圖中所畫的曲線就是

$$3x^2 = 2y^3 - 3y^2 + 8.$$

要描繪這條曲線，設 $g(y) = 2y^3 - 3y^2 + 8$，則 $x = \pm\sqrt{g(y)/3}$，而曲線對稱於 y 軸。由於 $g'(y) = 6y(y-1)$，g 有局部極大值（local maximum）$g(0) = 8$ 和局部極小值（local minimum）$g(1) = 7$。兩者皆為正數，所以 g 只有一個實零點，位於 -2 與 -1 之間（因為 $g(-2) = -20$，$g(-1) = 3$）；其數值為 $y_0 \approx -1.214$。因此這條曲線：

- 最低點在 $(0, y_0)$，該處 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$；
- 在 $y = 0$（即 $x = \pm\sqrt{8/3} \approx \pm 1.63$）和 $y = 1$（即 $x = \pm\sqrt{7/3} \approx \pm 1.53$）處有鉛垂切線，因為在這些位置 $y(y-1) = 0$；
- 在 $y = 0$ 與 $y = 1$ 之間稍微向軸彎回去（當 $x > 0$ 時，斜率 $x/(y(y-1))$ 在那裏是負的），然後當 $|x|$ 很大時，大致按 $y \approx (\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$ 增長。

為核對圖形，通過 $(1,-1)$ 的 S_1 曲線滿足 $-1 = \frac{1}{1-a}$，所以 $a = 2$，在該點的斜率為 -2；S_2 的斜率為 $\frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$，而確實 $(-2)\cdot\frac{1}{2} = -1$。$y = 1$ 處的鉛垂切線也合情合理：曲線在那裏與 $y = 1$（即 S_1 中 $a = 0$ 的成員）正交。

驗算

- 在 $(1,-1)$：$3(1)^2 = 3$，而 $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$。✓
- S_2 的曲線與 $a = 1$ 的曲線相交於 $(2,2)$：在該點 S_1 的斜率為 $-1/(2-1)^2 = -1$，S_2 的斜率為 $2/(2\cdot 1) = 1$，乘積為 -1。
- 以數值方法，我們找出了琥珀色曲線與圖中四條雙曲線的全部十二個交點（每條三個，例如 $a = -2$ 時的 $(1.5901,\ 0.4429)$），而斜率之積在每個交點都是 -1.00000000。

常見錯誤

- 微分方程中仍然留有 a：關鍵正正在於利用 $y = x/(x-a)$ 本身把它消去。
- 用了 $p_2 = -p_1$ 或 $p_2 = 1/p_1$，而不是 $p_1 p_2 = -1$。
- 把 S_2 的曲線畫成簡單的 U 形：它在 $y = 0$ 和 $y = 1$ 處有鉛垂切線，兩者之間還有一小段向後彎的部分。

STEP 之外

S_2 的曲線是 S_1 的正交軌線（orthogonal trajectories）。它們在物理學中以場線（field lines）與等勢線（equipotentials）相交的形式出現，又或者是流線（streamlines）與等速度勢線相交。這裏的技巧（消去參數，再把 y' 換成 $-1/y'$）是標準方法，而由此得出的一階方程，是常微分方程（ODE）入門課程的必備內容；參見 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。