詳細解答

STEP III 1992，第 3 題

純數學 • 曲線與多項式的根

STEP III 1992，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q3

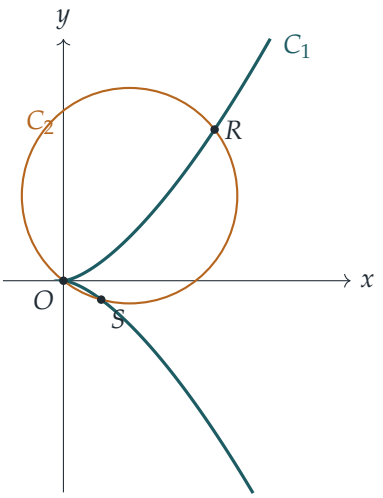
關鍵思路

把參數化（parametrisation）直接代入通過原點的圓的一般方程。這樣會得到一個關於 t 的多項式方程，它的根就是各交點的參數，而原點則以因子 t^2 的形式出現。餘下的是一個沒有 t^3 項的四次方程（quartic），所以它的根之和是固定的，兩兩乘積之和也是固定的。既然已知其中兩個根 r 和 s，另外兩個根便完全確定。

解答

草圖

由於 $x = t^2 \geq 0$，曲線位於半平面 $x \geq 0$ 內。把 t 換成 $-t$ 會把 (x, y) 變成 $(x, -y)$，所以曲線關於 x 軸對稱。消去 t 得 $y^2 = x^3$，故 $y = \pm x^{3/2}$。當 $t = 0$ 時，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$，而在原點附近 $|y| = x^{3/2}$ 遠小於 x。因此兩條分支離開 O 時都與 x 軸相切，曲線在 O 處有一個尖點（cusp）。當 t 很大時，兩條分支上升得很陡，因為 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$。



曲線 C_1 以藍綠色繪出。琥珀色的圓是 C_2 的一個例子，即 $r = 1$、$s = -\frac{1}{2}$ 時通過 O、R 和 S 的圓。

四次方程

通過原點的圓，其方程沒有常數項：

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

其中 g 和 f 是不同時為零的實常數。參數為 t 的點位於圓上，當且僅當

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{即} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

因子 t^2 給出 $t = 0$，也就是原點。除 O 以外的每個交點都有 $t \neq 0$，所以它的參數滿足

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

特別地，r 和 s 都是這個方程的根，而 a、b 是實常數，正如題目所要求。

C_1 上每一點恰好對應一個參數，因為當 $x \neq 0$ 時 $t = y/x$（而當 $x = 0$ 時 $t = 0$）。所以相異的兩點 R 和 S 有相異的參數，即 $r \neq s$，而 C_1 與 C_2 的交點恰好對應方程 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$ 的實根。

另外兩個根

設四次方程的四個根（實根或複根）為 r、s、p 和 q。比較

$$(t - r)(t - s)(t - p)(t - q) = t^4 + 0 \cdot t^3 + 1 \cdot t^2 + at + b$$

兩邊的係數，得

$$r+s+p+q=0,$$
$$rs+(r+s)(p+q)+pq=1.$$

（這裏我們把六個兩兩乘積分組為 rs、pq 和四個交叉項 $rp+rq+sp+sq=(r+s)(p+q)$。）

想一想 四個根之中我們只知道兩個。在不知道 a 和 b 的情況下，怎樣才能求出另外兩個？

t^3 和 t^2 這兩項的係數，即沒有用字母表示的那兩個，完全與圓無關。第一條方程給出 $p+q=-(r+s)$。代入第二條方程，

$$pq=1-rs+(r+s)^2=r^2+rs+s^2+1.$$

所以 p 和 q 是以下二次方程的根：

$$t^2+(r+s)\,t+\left(r^2+rs+s^2+1\right)=0,$$

其係數只取決於 r 和 s。C_1 與 C_2 若再有其他交點，其參數必須是這個二次方程的實根。

（順帶可得 $a=-(r+s)(r^2+s^2+1)$ 及 $b=rspq=rs(r^2+rs+s^2+1)$，所以通過 O、R 和 S 的圓由 r 和 s 確定。）

再沒有其他實交點

這個二次方程的判別式（discriminant）是

$$\begin{aligned}\Delta&=(r+s)^2-4\left(r^2+rs+s^2+1\right)\\&=-3r^2-2rs-3s^2-4\\&=-\left[2(r^2+s^2)+(r+s)^2+4\right].\end{aligned}$$

方括號內的數值至少是 4，因為 $2(r^2+s^2)$ 和 $(r+s)^2$ 都是非負的。所以 $\Delta\le -4<0$，這個二次方程沒有實根：p 和 q 是一對非實數的共軛複數（complex conjugates）。

因此 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ 的實根只有 0、r 和 s。由於每個實根恰好對應 C_1 上的一點，C_1 與 C_2 的實交點就只有 O、R 和 S。這正是我們要證明的。

驗算

取 $r=1$，$s=-\frac{1}{2}$。由上面的公式得 $a=-\frac{9}{8}$ 及 $b=-\frac{7}{8}$，所以 $f=-\frac{9}{16}$，$g=-\frac{7}{16}$。圓心是 $\left(\frac{7}{16},\frac{9}{16}\right)$，而 $R=(1,1)$ 和 $S=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$ 與圓心的距離平方都是 $\frac{130}{256}$，O 也是如此。

餘下的二次式是 $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{4}$，其判別式為 $\frac{1}{4} - 7 < 0$。這就是圖中的圓，可以看到它與 C_1 只相交於 O、R 和 S。我們還用數值方法檢驗了 400 對隨機選取的 (r, s)。對每一對，我們求出通過 O、R、S 的圓，確認了因式分解，並在 $-30 \leq t \leq 30$ 的範圍內逐點檢查：圓方程只在 $t = r$ 和 $t = s$ 處變號。

常見錯誤

- 忘記通過 O 的圓沒有常數項。一般的圓有三個常數，而正是因為少了常數項，才會出現因子 t^2。
- 以為重根（double root）$t = 0$ 表示圓在 O 處與 C_1 相切。其實這個重根來自尖點：每一個通過 O 的圓都會給出因子 t^2。
- 只說判別式「顯然是負數」，卻沒有把它寫成「負的平方和加正常數」的形式。

STEP 之外

曲線 $y^2 = x^3$ 是奇異三次曲線（singular cubic curve）的標準例子。像本題這樣連同重數（multiplicity）一起計算交點，正是貝祖定理（Bézout's theorem）的起點：次數分別為 m 和 n 的兩條曲線，按適當方式計算，相交於 mn 點。一條三次曲線和一個圓給出 6 個交點，這與我們的結果吻合：O 處的兩個，加上 R、S 和兩個複數點。同一套韋達（Vieta）式的係數關係，也是橢圓曲線（elliptic curves）上羣律（group law）的基礎。Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry* 以及 Silverman 與 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 都把這些想法進一步發展下去。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。