詳細解答

# STEP III 1992，第 2 題

純數學 • 矩陣的冪與數學歸納法

> **STEP III 1992，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

## 關鍵思路

一切都建基於一個事實：$\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$。這表示任何形如 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 的矩陣（matrix）相乘，所得的積仍然是這個形式，所以我們自始至終只需追蹤一個數。只要留意到在乘法之下表現良好的是 $1 + 2p$ 而不是 $p$，那些看似累贅的式子 $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$ 便一目了然。

## 解答

### 一條乘法法則

由於

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J},$$

而且 $\mathbf{I}$ 與任何矩陣都可交換（commute），所以對任意實數 $p$ 和 $q$，

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p+q+2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

留意

$$1 + 2(p+q+2pq) = (1+2p)(1+2q),$$

所以如果我們把數 $1+2p$ 配給矩陣 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$，矩陣相乘便對應於這些數相乘。對於 $\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$，所配的數是 $1 + 2a$。

### 平方與立方

在 $(*)$ 中取 $p = q = a$，得

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + (2a + 2a^2)\mathbf{J}, \qquad 及 \qquad \tfrac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1] = \tfrac{1}{2}(4a + 4a^2) = 2a + 2a^2,$$

所以 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]\mathbf{J}$，正如題目所求。

至於立方，寫成 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$，並在 $(*)$ 中取 $p = 2a + 2a^2$，$q = a$：

$$\begin{aligned} p + q + 2pq &= 2a + 2a^2 + a + 2a(2a + 2a^2) \\ &= 3a + 6a^2 + 4a^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(6a + 12a^2 + 8a^3) = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1], \end{aligned}$$

當中用到 $(1+2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$。所以 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1]\mathbf{J}$，正如題目所求。

至於四次方，最快捷的做法是 $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$。取 $p = q = \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]$，則 $1 + 2p = (1+2a)^2$，所以配給 $\mathbf{A}^4$ 的數是 $(1+2a)^2(1+2a)^2 = (1+2a)^4$。因此

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^4 - 1]\mathbf{J} = \mathbf{I} + (4a + 12a^2 + 16a^3 + 8a^4)\mathbf{J}.$$

### 一般次方

從以上規律可以猜想

$$p_k = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1], \qquad \text{等價地} \qquad 1 + 2p_k = (1+2a)^k.$$

我們用歸納法（induction）證明，對所有整數 $k \geq 1$，$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ 成立。

基礎步驟。當 $k = 1$ 時，$p_1 = \frac{1}{2}(1 + 2a - 1) = a$，而 $\mathbf{A}^1 = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$。（公式亦給出 $p_0 = 0$，與 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 吻合。）

歸納步驟。假設 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$，其中 $p_k$ 如上所述。那麼由 $(*)$，

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{I} + (p_k + a + 2ap_k)\mathbf{J},$$

而

$$\begin{aligned} p_k + a + 2ap_k &= (1+2a)p_k + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)[(1+2a)^k - 1] + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1} - \tfrac{1}{2}(1+2a) + a \\ &= \tfrac{1}{2}[(1+2a)^{k+1} - 1] = p_{k+1}. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$，由歸納法可知

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]\mathbf{J} \qquad \text{對所有整數} k \geq 1.$$

**想一想** 假如題目沒有先給出 $\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{A}^3$，我又怎樣猜到 $p_k$ 的形式？

答案就在遞推關係（recurrence）本身：歸納步驟顯示 $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$，這是一個一階線性遞推關係。兩邊同時加上 $\frac{1}{2}$，得 $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$，所以 $p_k + \frac{1}{2}$ 是等比數列（geometric sequence），公比為 $1+2a$，首項為 $a + \frac{1}{2}$。這正正就是 $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$。

**負數次方（額外收穫）。** 若 $a \neq -\frac{1}{2}$，公式對 $k = -1$ 同樣成立：$p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$，而由 $(*)$ 得 $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$，所以 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$。若 $a = -\frac{1}{2}$，則 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 是奇異（singular）矩陣，而公式對每個 $k \geq 1$ 都給出 $p_k = -\frac{1}{2}$：事實上 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$。

## 驗算

- 取 $a = 1$：$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，直接相乘得 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$。公式給出 $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$ 及 $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$。
- $\mathbf{A}$ 有特徵向量（eigenvector）$(1,1)$，對應的特徵值（eigenvalue）為 $1+2a$；另有特徵向量 $(1,-1)$，對應的特徵值為 $1$。所以 $\mathbf{A}^k$ 的特徵值是 $(1+2a)^k$ 和 $1$；矩陣 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ 的特徵值是 $1+2p_k$ 和 $1$，兩者一致。
- 我們以精確的有理數運算，對 $0 \leq k \leq 12$ 以及四十個隨機選取的 $a$ 值（包括 $a = -\frac{1}{2}$）驗證了 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$。

## 常見錯誤

- 用二項式定理（binomial theorem）展開 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})^k$ 是合理的（因為 $\mathbf{I}$ 與 $\mathbf{J}$ 可交換），但若忘記 $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$ 而誤當作 $\mathbf{J}$，便會得出錯誤的係數。
- 在歸納步驟中，先寫下關於 $p_{k+1}$ 的結論再倒推回去，並不算是證明；應該由 $\mathbf{A}^k\mathbf{A}$ 出發。

## STEP 之外

我們配給 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 的數 $1+2p$，正是該矩陣對應於向量 $(1,1)$ 的特徵值；所有這類矩陣都有相同的特徵向量 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$，所以它們可以用同一個基底變換（change of basis）同時對角化，而計算次方時只需把特徵值自乘 $k$ 次。這就是對角化（diagonalisation）背後的

想法，它把矩陣次方、矩陣指數和線性遞推關係都化為純量計算。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）以大量例題闡述這個想法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。