詳細解答

STEP III 1992，第 15 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 1992，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q15

關鍵思路

由於山羊的位置在田地上均勻分佈（uniformly distributed），每一個概率都只是某塊面積除以 a^2。所以整道題歸根究底，就是要求出正方形內與角 O 的距離小於 r 的那部分的面積。當 r 超過 a 之後，四分之一圓會溢出正方形以外，而要求出仍留在正方形內的面積，最利落的做法是把它切成兩個直角三角形和一個扇形（sector）。之後把分佈函數微分便得到密度，而繫繩的山羊則是同一個想法，只是換了一個區域。

解答

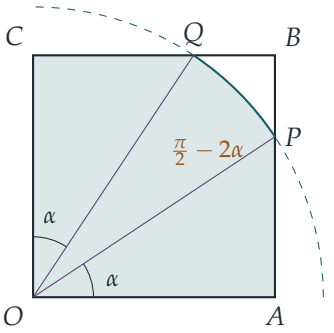
把 O 放在原點，OA 沿 x 軸，OC 沿 y 軸，於是田地就是 $0 \le x \le a$、$0 \le y \le a$。記 $F(r) = \mathrm{P}(R < r)$，它等於田地中滿足 $x^2 + y^2 < r^2$ 的那部分的面積除以 a^2。

R 的分佈

當 $0 < r \le a$ 時。以 O 為圓心、半徑為 r 的四分之一圓盤完全落在田地之內，所以

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

當 $a \le r \le a\sqrt{2}$ 時。這時圓弧與邊 AB（即直線 $x = a$）相交於 $P = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$，與邊 CB（即直線 $y = a$）相交於 $Q = (\sqrt{r^2 - a^2}, a)$。設 $\alpha = \cos^{-1}(a/r)$，它就是角 AOP（因為 $\cos \angle AOP = a/r$）。根據對稱性，角 COQ 也等於 α。



陰影區域（即田地中與 O 的距離小於 r 的部分）可分成三塊：

- 三角形 OAP，直角在 A，兩條直角邊分別為 a 和 $\sqrt{r^2 - a^2}$，所以面積為 $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$；
- 三角形 OCQ，與它全等（congruent），面積相同；
- 扇形 OPQ，半徑為 r，圓心角為 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$，面積為 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$。

把三者相加再除以 a^2，

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\,\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

這正是所求的結果。（當 $r \geq a\sqrt{2}$ 時，整塊田地與 O 的距離都小於 r，所以 $F(r) = 1$。在 $r = a\sqrt{2}$ 處，公式給出 $1 + \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$，與預期相符。）

中位數

在 $r = a$ 處有 $F(a) = \pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$，所以中位數（median）$m$ 落在 $0 < m < a$ 的範圍內，這裏適用的是較簡單的那條公式：

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

概率密度函數

概率密度函數（probability density function）為 $f(r) = F'(r)$。當 $0 < r < a$ 時，$f(r) = \dfrac{\pi r}{2a^2}$。

當 $a < r < a\sqrt{2}$ 時，我們需要 $\cos^{-1}(a/r)$ 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2/r^2}} \cdot \left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

然後對 F 逐項微分（最後一項要用積法則（product rule））：

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

因為第一項與最後一項互相抵消。所以

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他情況。} \end{cases}$$

這在幾何上也說得通：$f(r)\,\mathrm{d}r$ 等於（半徑為 r 的圓在田地內的弧長）$\times\,\mathrm{d}r/a^2$，而該段弧所對的圓心角在 $r \le a$ 時為 $\frac{\pi}{2}$，在 $r > a$ 時為 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$。兩段公式在 $r = a$ 處吻合（都給出 $\pi/(2a)$），而 f 在 $r = a\sqrt{2}$ 處降至 0，那裏 $\alpha = \pi/4$。

繫繩的山羊

山羊被繫住之後，只能到達田地中 $R \le a$ 的點，即以 O 為圓心、半徑為 a 的四分之一圓盤，其面積為 $\frac{1}{4}\pi a^2$。牠的位置仍然是均勻分佈，只是現在分佈在這個四分之一圓盤上。這恰好就是原來的模型以事件 $R \le a$ 為條件之後的情況。

> ? **想一想** 哪一個坐標量度的是與圍欄 OC 的距離？

由於 OC 沿 y 軸，與 OC 的距離就是 x。所以我們需要求出四分之一圓盤中 $x > a/2$ 的那部分的面積：

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

（從幾何上看，這是一個圓心角為 $\pi/3$ 的扇形減去一個邊長為 $a/2$ 和 $\sqrt{3}a/2$ 的三角形，因為直線 $x = a/2$ 與圓弧的交點和 OA 所成的角為 $\pi/3$。）除以面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$，

$$\mathrm{P}\left(\text{距}OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

驗算

- 連續性：F 的兩條公式在 $r = a$ 處都給出 $\pi/4$，而且 $F(a\sqrt{2}) = 1$。

- 以單位正方形內 4×10^5 個均勻分佈的點進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），結果在 $r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$ 處與 $F(r)$ 吻合至大約小數點後三位。模擬得出的樣本中位數為 0.7986，而 $\sqrt{2/\pi} = 0.7979$；條件比例為 0.3914，而 $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$。
- 密度在 $[0, a\sqrt{2}]$ 上的數值積分為 1，並且在若干個點上與 F 的數值導數相符。
- 繫繩情況的答案小於 $\frac{1}{2}$，這是應有的結果：四分之一圓盤在遠離 OC 的地方較窄。

常見錯誤

- 求中位數時忘記了 F 在 $r > a$ 時要用另一條公式。值得先檢查 $F(a) > \frac{1}{2}$，由此可知中位數落在容易處理的範圍內。
- 把扇形的圓心角寫成 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 而不是 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$。被切去的角位有兩塊，兩邊各一。
- 在繫繩的部分除以 a^2。條件概率（conditional probability）應除以四分之一圓盤的面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

STEP 之外

這裏的 R 是在某個區域內均勻選取的一點的函數，而它的分佈是透過量度 $R < r$ 的區域而得出的。這正是求隨機變量（random variable）的函數的分佈的一般方法，而密度公式 $f(r) = (\text{弧長})/a^2$ 則讓人初嘗「餘面積」（coarea）的想法，即把一個區域切成一片片水平集（level sets）。同樣的幾何推理也是布豐投針（Buffon's needle）以及正方形內兩個隨機點之間的距離等問題的基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*，以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*，都有闡述這種處理連續隨機變量的幾何方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。