詳細解答

STEP III 1992，第 14 題

力學 • 解繞繩的動力學

> **STEP III 1992，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

關鍵思路

整個問題只由一個角 θ 決定。繩子未貼着圓盤的部分在 Q 點與圓盤相切（tangent），其長度等於已從圓盤鬆開的那段繩子的弧長，因此很容易用 θ 表示 P 的位置（P 所描出的曲線是圓的漸伸線（involute））。求導之後，會發現 P 的速度（velocity）與繩子垂直。所以繩子的張力（tension）不作功，沿運動方向只有摩擦力（friction）起作用。於是沿 PQ 方向和垂直於它的方向分解，便可把問題乾淨利落地一分為二。

解答

P 的位置

把 P 視為水平桌面上的一個質點（particle），所受阻力只有題目給出的摩擦力，並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible）。重力與法向反作用力（normal reaction）互相抵銷，所以水平方向的力只有沿 PQ 的張力 T 和摩擦力。

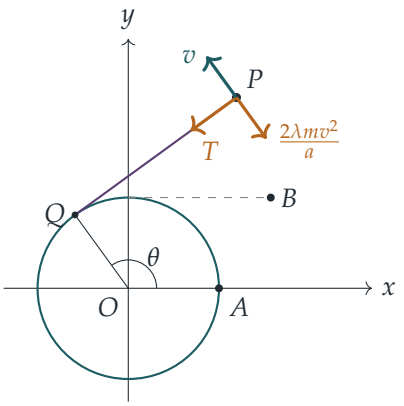
取 $A = (a, 0)$ 在 x 軸上，則切點為 $Q = (a\cos\theta,\, a\sin\theta)$。當 P 位於 A 時，整條繩子都繞在圓盤上；由於繩子不可伸長，鬆開的部分 QP 的長度等於已解開的弧 AQ 的長度，即 $a\theta$。繩子在 Q 點與圓盤相切，所以 QP 垂直於 OQ，方向為單位向量（unit vector）$(\sin\theta,\, -\cos\theta)$（當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，這向量是 $(1, 0)$，由圓盤頂點指向 B，如圖所示）。因此

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta,\, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta,\, -\cos\theta),$$

所以

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

第一條式子就是所求的 x 坐標。在 B 點，鬆開的繩子與 OA 平行，並在圓盤頂點與圓盤相切，所以該處 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而 $B = (\frac{\pi a}{2},\, a)$。



速度與加速度

設 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 為沿 OQ 方向的單位向量，$\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 為由 P 指向 Q 的單位向量（與上文的繩子方向相反）。注意 $\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$ 及 $\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$。

對 x 和 y 求導，

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

所以速度為 $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$：它與 OQ 平行，因而與繩子垂直。利用乘法法則（product rule）再求導一次，

$$\ddot{\mathbf{r}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

所以加速度沿 PQ 方向（指向 Q）的分量為 $a\theta\dot\theta^2$，而垂直於 PQ 方向（即 $\mathbf{e}$ 的方向）的分量為 $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$，正如題目所要求。

運動方程

在 B 點，$\theta = \frac{\pi}{2}$，速度為 $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$。質點沿垂直於 OA 並遠離 OA 的方向拋出，即表示速度 V 沿 y 軸正方向，所以

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{（起初）。}$$

只要 $\dot\theta > 0$，速率便是 $v = a\theta\dot\theta$，而運動方向為 $+\mathbf{e}$，所以大小為 $2\lambda mv^2/a = 2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2$ 的摩擦力沿 $-\mathbf{e}$ 方向作用。張力沿 $\mathbf{f}$ 方向作用，沒有 $\mathbf{e}$ 分量。

> ? **想一想** 要得到一條只含 θ 的方程，應該用加速度兩個分量中的哪一個？

應該用垂直的那個：張力 T 是未知的，而它只出現在沿 PQ 方向的分量之中。在垂直於 PQ 的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m(a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta) = -2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2.$$

兩邊除以 $ma\theta\dot\theta$（這是容許的，因為 $\theta>0$ 且 $\dot\theta>0$），

$$\frac{\ddot\theta}{\dot\theta}=-\left(\frac{1}{\theta}+2\lambda\theta\right)\dot\theta,$$

這就是所求的結果。

求 $\dot\theta$

左邊是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot\theta$，而根據鏈式法則（chain rule），右邊是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\ln\theta-\lambda\theta^2)$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\ln(\theta\dot\theta)+\lambda\theta^2\Big)=0,\qquad\text{所以}\qquad\theta\dot\theta\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2}=\text{常數}.$$

在 B 點，這個常數為 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}=\frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$。於是

$$\dot\theta=\frac{V}{a\theta}\exp\Big(\lambda\Big(\frac{\pi^2}{4}-\theta^2\Big)\Big).$$

這對任何 θ 都是正數，所以 $\dot\theta$ 永不為零，上文所用的假設 $\dot\theta>0$ 自始至終成立。（答案除了 θ、λ 和 a 之外，必然還涉及 V。）等價地說，速率為 $v=a\theta\dot\theta=V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4-\theta^2)}$。

$\theta=\pi$ 時的張力

沿 PQ 方向只有 T 這一個力，它指向 Q，所以 $T=ma\theta\dot\theta^2$。當 $\theta=\pi$ 時，

$$\dot\theta^2=\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4-\pi^2)}=\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

所以

$$T=ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}=\frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

驗算

- 鬆開的繩子 PQ 長度為 $a\theta$，而它正是漸伸線的曲率半徑（radius of curvature），所以 Q 是曲率中心（centre of curvature），指向 Q 的加速度分量應為 $v^2/(a\theta)=a\theta\dot\theta^2$。結果確是如此。
- 當 $\lambda=0$（沒有摩擦力）時，速率保持為 V；這是必然的，因為張力與運動方向垂直，不作功。在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，$T=mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$，這正是以 B 點的繩長 $r=\frac{\pi a}{2}$ 代入 mv^2/r 的結果。
- 數值方面，取 $a=1.3$、$m=0.7$、$V=2.1$、$\lambda=0.25$，我們用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）逐步求解 θ 的方程：結果與 $\dot\theta$ 的公式吻合，誤差在 10^{-14} 以內。以有限差分（finite difference）計算 (x,y) 的加速度，所得結果與兩個分量及摩擦力均吻合，並在 $\theta=\pi$ 時得出 $T\approx0.018667$，與公式一致。

常見錯誤

- 以 $\theta = 0$ 作為初始值：質點由 B 出發，該處 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而不是由 A 出發。
- 沿 PQ 方向分解來求 $\dot{\theta}$：那條方程含有未知的張力，而摩擦力在該方向沒有分量。
- 忘記摩擦力與速度方向相反，而速度是沿 OQ 方向，不是沿繩子方向。

STEP 之外

P 的路徑是圓的漸伸線，即拉緊的繩子從線軸上鬆開時，繩端所描出的曲線，也是大多數齒輪輪齒所採用的形狀。這裏用到的事實(速度與繩子垂直，以及繩長就是曲率半徑)，都是曲線微分幾何(differential geometry)中漸屈線(evolute)與漸伸線關係的特殊情況。從動力學的角度看，這是一個很好的例子，說明如何利用內稟(intrinsic)分量(即切向和法向分量)把已知的力與未知的約束力(constraint force)分開。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種思路討論極坐標（polar coordinates）和內稟坐標下的運動，以及受約束的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。