詳細解答

STEP III 1992，第 13 題

力學 • 繞固定軸的轉動

> **STEP III 1992，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q13

關鍵思路

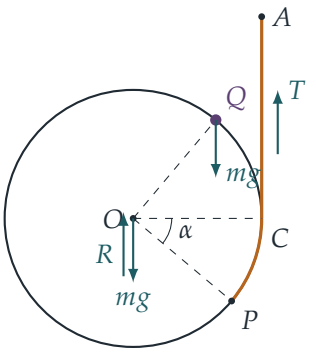
轉軸固定，所以圓盤與質點構成一個剛體（rigid body），只需一個坐標，即轉過的角度。由能量守恆（conservation of energy）（彈性勢能、重力勢能、動能）可得每個位置的角速率（angular speed），而「P 到達 C」的意思不過是動能在途中始終不會降至零。求得在 C 處的角速率後，把牛頓（Newton）第二定律應用於整個系統的質心（centre of mass），便可求出轉軸上的反作用力（reaction）。

解答

模型與幾何

我們把 Q 視為質點，並把弦線視為輕弦。我們假設盤邊光滑，所以整條弦線上的張力 T 處處相同，而弦線對盤邊的法向接觸力都通過 O。因此，弦線對 O 的力矩（moment）只有在 P 處沿切線方向拉扯的張力所產生的力矩，即 $2bT$。（若把張力看成作用於弦線在 C 處離開盤邊的位置，所得的力矩完全相同：張力沿 AC 鉛垂向上，與 O 的距離為 $2b$。）

設 $\alpha = \angle POC$，其中 P 在 OC 下方。釋放時 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，而 P 到達 C 時 $\alpha = 0$。由於 $\angle POQ = 90°$，OQ 在 OC 上方並與之成角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以 Q 的高度比 O 高 $2b\cos\alpha$。特別地，Q 起初與 O 同高（位於 C），而當 P 到達 C 時，它在 O 的正上方。



弦線的總長度為 $AC + \text{弧}CP = \pi b + 2b\alpha$，而其自然長度（natural length）為 πb，所以伸長量（extension）為 $2b\alpha$。由胡克定律（Hooke's law），

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

而所儲存的彈性勢能（elastic energy）為

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

對轉軸的轉動慣量（moment of inertia）等於圓盤的轉動慣量加上盤邊上 Q 的轉動慣量：

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P 到達 C

當圓盤轉動，使 P 向 C 上升（即 α 減小）時，弦線縮短並釋出彈性勢能，同時 Q 上升。轉軸固定而且光滑，所以能量守恆。系統在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 處由靜止開始運動，此時 Q 相對於 O 的高度為 0，且 $E = \frac{1}{2}\pi kmgb$，於是

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

圓盤確實會朝正確的方向開始轉動：釋放時弦線以 $T = kmg$ 在半徑 $2b$ 處拉扯，而 Q 的重量則在水平距離 $2b$ 處產生反方向的力矩，所以淨力矩為 $2(k-1)mgb > 0$，因為 $k > \frac{4}{\pi} > 1$。

P 能到達 C，只要對 $[0, \frac{\pi}{2})$ 內的每個 α，動能都保持為正，即只要

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{對於} 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

由於 $k > \frac{4}{\pi}$ 且 $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$，左邊大於

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

所以只需證明在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 $g(\alpha) = 1 - \dfrac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$。

想一想 怎樣在整個區間上比較一個二次函數與 $\cos\alpha$？

考慮二階導數（second derivative）。我們有 $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$，$g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$，所以 $g'(0) = 0$，而 $g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$。由於 $\frac{8}{\pi^2} < 1$，而 $\cos\alpha$ 由 1 遞減至 0，故存在唯一的 α_0，使得在 $[0, \alpha_0)$ 上 $g'' > 0$，在 $(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $g'' < 0$。

- 在 $[0, \alpha_0]$ 上，g' 由 $g'(0) = 0$ 開始遞增，所以 $g' \geq 0$，從而 $g \geq g(0) = 0$。
- 在 $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上，g 是凹（concave）的，所以它的圖像位於連接兩端點值 $g(\alpha_0) \geq 0$ 與 $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ 的弦之上；因此在該處同樣有 $g \geq 0$。

所以 $g \geq 0$ 處處成立，而嚴格不等式 $k > \frac{4}{\pi}$ 使動能在 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時嚴格為正。圓盤在 $\alpha = 0$ 之前不會靜止下來，所以 P 到達 C。特別地，在 C 處（代入 $\alpha = 0$），

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

其中 ω 是 P 位於 C 時的角速率。（由此可見條件 $k > \frac{4}{\pi}$ 的來由：它正好保證 $\omega^2 > 0$。）

轉軸上的反作用力

當 P 位於 C 時，有兩件事同時發生。

- 弦線處於自然長度（$AC = \pi b$，而弧段已消失），所以 $T = 0$。
- Q 在 O 的正上方，所以它的重量對 O 沒有力矩。

所以在該瞬間對轉軸沒有力矩，角加速度為零。圓盤的中心 O 固定不動，而 Q 沿半徑為 $2b$ 的圓運動，角加速度為零，所以它的加速度純粹是向心（centripetal）的：大小為 $2b\omega^2$，方向由 Q 指向 O，即鉛垂向下。

想一想 求反作用力的方程中應包括哪些力？

對整個系統（圓盤連同 Q）在鉛垂方向應用牛頓第二定律。外力包括兩個重量，合共 $2mg$ 向下；轉軸上的反作用力 R 向上；以及弦線的張力，它在此瞬間為零。Q 與圓盤之間的內力互相抵消。只有 Q 有加速度，所以

$$R - 2mg = m\,(-2b\omega^2),$$

因此

$$R = 2mg - 2mb \cdot \frac{(\pi k - 4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k - 4)}{3} = \frac{mg(10 - \pi k)}{3},$$

正如所求。（反作用力的水平分量在此瞬間為零，因為 Q 沒有水平加速度。）

驗算

- 在臨界情況 $k = \frac{4}{\pi}$ 下，系統僅僅能夠緩緩升到 C，此時 $\omega = 0$，而公式給出 $R = 2mg$，即靜止時的值。兩者吻合。
- 用電腦對運動方程 $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$（其中 $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$）作數值積分。取 $m = g = b = 1$ 及 $k = 2$，系統到達 C 時 $\omega^2 = 0.38053$，與 $(2\pi - 4)/6$ 相符，且 $R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$。對於 $k = 1.29, 1.5, 3$，結果同樣準確至小數點後六位。
- 若 $k > \frac{10}{\pi}$，公式給出 $R < 0$：轉軸必須向下拉，因為 Q 越過頂點時轉得太快，所需的向心力超過了系統的重量。

常見錯誤

- 把伸長量自始至終當作 πb。事實上，當 P 到達 C 時，伸長量會縮減至零，這正是張力在該處消失的原因。
- 忘記圓盤本身的轉動慣量 $\frac{1}{2}m(2b)^2$，只用了 Q 的轉動慣量。
- 只證明在 C 處的動能為正。「P 到達 C」要求動能在整段路程上都保持為正。

STEP 之外

最後一步是「外力總和等於總質量乘以質心加速度」的剛體版本，而求支點上的反作用力正是它的經典應用。大學一年級的剛體動力學課程會把它與角動量方程 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$ 一併發展。不等式 $\cos\alpha \le 1 - 4\alpha^2/\pi^2$ 是約當不等式（Jordan's inequality）$\sin x \ge 2x/\pi$ 的近親，這裏是用標準的凸性（convexity）論證來證明的。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對定軸轉動及支點反作用力有非常清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。