詳細解答

STEP III 1992，第 12 題

力學 • 動量守恆

STEP III 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

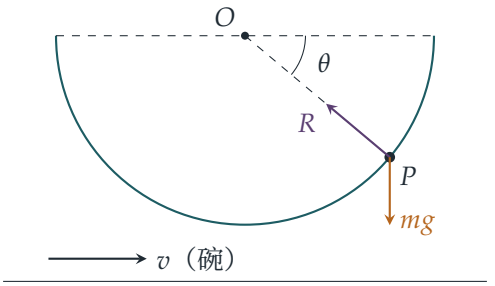
step.maths.org/questions/92-s3-q12

關鍵思路

碗與質點組成的系統並無受到任何水平方向的外力，而且除重力外沒有其他力作功，所以我們有兩條守恆定律：水平動量守恆（conservation of horizontal momentum）和能量守恆（conservation of energy）。動量把碗的速率與 $\dot{\theta}$ 聯繫起來；能量隨後給出 v^2。至於反作用力（reaction），最簡潔的做法是在碗的（加速）參考系（frame）中處理，在那裏質點只是繞 O 作圓周運動；同時要記住，反作用力也是碗所受的唯一水平力。

解答

模型。碗是光滑的，所以 P 所受的反作用力 R 沿法線方向，即沿 PO 方向。小車是輕的，桌面是光滑的，所以碗（連同小車）所受的唯一水平力，就是質點推力的水平分量。設 P 從碗邊的右端出發，於是當 P 向下滑時，θ 從 0 開始增加；碗則向右移動。



水平動量守恆

設碗的水平位置為 X，則 $\dot{X} = v$。相對於 O，質點位於 $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，所以它的位置是 $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，而它的速度是

$$(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta).$$

系統沒有受到水平方向的外力，而且由靜止開始，所以總水平動量始終為零：

$$2mv + m(v - a\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

這正是所要求的結果。留意此時質點的水平速度是 $v - 3v = -2v$：它以碗的速率的兩倍向左移動，這樣才能抵銷碗的動量 $2mv$。

能量

反作用力所作的淨功為零（它是內力，而且表面光滑），桌面也不作功，所以能量守恆。當 OP 處於角度 θ 時，質點已下降了 $a\sin\theta$。利用 $a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$，質點的垂直速率為 $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$，所以

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta] \\ &= mv^2\left(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\right). \end{aligned}$$

兩邊乘以 $2\sin^2\theta/m$：

$$2ga\sin^3\theta = v^2(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta) = v^2(9 - 3\sin^2\theta),$$

所以

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

這就是第二個結果。

反作用力

> **想一想** 碗正在加速。我們怎樣寫出質點沿 PO 方向的運動方程（equation of motion）？

用兩條方程。第一，考慮碗：質點以大小為 R、方向由 O 指向 P 的力推它，這個力的水平分量是向右的 $R\cos\theta$。所以碗的加速度 A 滿足

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

第二，考慮質點，在碗的參考系中處理。在那裏質點以速率 $a\dot{\theta}$ 在以 O 為圓心、半徑為 a 的圓上運動，而除了 R 和 mg 之外，它還受到一個向左的假想力（fictitious force）mA。

沿指向 O 的方向（方向為 $(-\cos\theta, \sin\theta)$）分解，重力的貢獻是 $-mg\sin\theta$，假想力的貢獻是 $+mA\cos\theta$，所以

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

（等價地，在地面參考系中，質點的加速度等於碗的加速度 A 加上它相對於碗的圓周運動加速度；把它沿 PO 方向分解，會得到同一條方程。）

由頭兩個結果，

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

把由 (1) 得到的 $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$ 代入 (2)，並把含 R 的項合併：

$$R\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

由於 $1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$，

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

驗算

- 在起點，$\theta = 0$ 給出 $R = 0$，這是應有的結果：質點靜止於碗邊，沒有任何東西把它壓向碗。
- 在碗底，$\theta = \frac{1}{2}\pi$：碗的加速度為零（由 (1)），$a\dot{\theta}^2 = 3g$，而 $R - mg = 3mg$，所以 $R = 4mg$，與公式給出的 $2mg\cdot 8/2^2$ 吻合。
- 假如碗是固定的（無限重），通常的結果會是 $v_P^2 = 2ga\sin\theta$ 和 $R = 3mg\sin\theta$；碗的反衝令 R 在碗邊附近變小（當 θ 很小時約為 $2mg\sin\theta$ 而不是 $3mg\sin\theta$，因為碗正在遠離 P），但在碗底卻變大（$4mg$ 而不是 $3mg$）。
- 以數值方法逐步求解完整的運動方程（取 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$g = 9.81$），由碗邊一直到碗底，都重現了 $3v = a\dot{\theta}\sin\theta$、$v^2$ 的公式和 R 的公式，誤差在 10^{-7} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$，彷彿碗是固定的。碗在加速，所以質點的加速度並不只是它相對於碗的圓周運動加速度。
- 用 $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$ 作為質點的動能（kinetic energy）：$a\dot{\theta}$ 是它相對於碗的速率，而不是相對於桌面的速率。

STEP 之外

這是一個二自由度（two-degree-of-freedom）系統，而最簡潔、最有系統的處理方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）：把動能和勢能（potential energy）用 X 和 θ 表示，動量守恆便會自然得出，因為 X 並不出現在拉格朗日量（Lagrangian）之中（它是一個「循環」（cyclic）坐標）。我們所用的假想力，是非慣性參考系（non-inertial frame）力學中最簡單的情形；大學一年級的課程會把它推廣到旋轉參考系，並引入離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對非慣性參考系和相互作用物體的系統都有很出色的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。