詳細解答

STEP III 1992，第 11 題

力學 • 碰撞與恢復係數

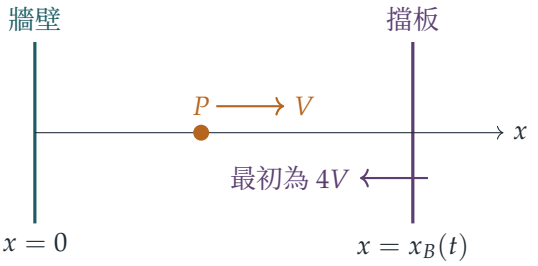
> **STEP III 1992，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q11

關鍵思路

所有位置一律由牆壁量起，這樣質點和擋板與牆壁的距離各自都有一條簡單的公式。所謂碰撞，不過是其中兩條公式取值相同的一刻，於是每個關於時間的問題都化為一條二次方程（quadratic）。碰撞時，牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）針對的是相對速度（relative velocity），所以擋板在該瞬間本身的速度至關重要。

解答

把 P 看成一個質點（particle），在光滑（smooth）桌面上沿着通過 O 並垂直於牆壁的直線運動。取 x 為與牆壁 AB 的距離，以朝向擋板的方向為正，並由拋射的一刻起計時間 t。速度以離開牆壁的方向為正。



第一次碰撞

擋板起初與牆壁相距 $\frac{75}{32}VT$，速度為 $-4V$，並有恆定加速度（constant acceleration）$+4V/T$，所以由勻加速運動公式可得

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

在首次碰到任何東西之前，P 以恆定速率運動（因為桌面光滑），所以 $x_P = Vt$。兩者在 $x_P = x_B$ 時相遇。設 $s = t/T$，則

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \iff 64s^2 - 160s + 75 = 0 \iff (8s-5)(8s-15) = 0.$$

首次相遇對應較小的根，所以碰撞發生於 $t = 5T/8$，正如題目所求。（在此之前，間距 $x_B - x_P$ 為正，因為它在 $s = 0$ 時為正，而其間並無任何根。）

此刻 P 位於 $x = \frac{5}{8}VT$，而擋板的速度為

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

所以擋板仍然朝着牆壁運動，速率為 $\frac{3}{2}V$。

碰撞後的速率

擋板的運動不受影響，所以只需用到牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。接近速率（speed of approach）為 $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$。若 P 在緊接碰撞之後的速度為 w，則分離速率（speed of separation）為 $-\frac{3}{2}V - w$，而

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \implies w = -\tfrac{11}{4}V.$$

所以 P 以速率 $\dfrac{11V}{4}$ 朝牆壁反彈。

想一想 為甚麼反彈後的速率比 P 原先的速率 V 還要大？

碰撞的一刻，擋板正朝着 P 運動，就像球棒擊球一樣。恢復定律針對的是 P 相對於擋板的速率：相對於擋板，P 以 $\frac{5}{2}V$ 到達，以 $\frac{5}{4}V$ 離開。再加上擋板本身朝向牆壁的 $\frac{3}{2}V$，便得 $\frac{11}{4}V$。

從牆壁反彈與第二次碰撞

P 要以速率 $\frac{11}{4}V$ 走過距離 $\frac{5}{8}VT$，需時 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$。因此它撞上 AB 的時刻為

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

擋板不可能在途中擋路。在這段時間內，它朝牆壁運動的速率始終比 P 慢（它的速率由 $\frac{3}{2}V$ 起不斷下降），而且它根本不會到達牆壁：它最接近牆壁的時刻是 $t = T$，此時 $v_B = 0$，而 $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$。

牆壁固定不動，所以當 $e=\frac{1}{2}$ 時，質點以速率 $\frac{11}{8}V$ 反彈，其後

$$x_P=\tfrac{11}{8}V\left(t-\tfrac{75}{88}T\right)=\tfrac{11}{8}Vt-\tfrac{75}{64}VT.$$

下一次與擋板碰撞，發生於 t_1 之後首次出現 $x_P=x_B$ 的時刻。以 $s=t/T$ 表示，

$$\tfrac{75}{32}-4s+2s^2=\tfrac{11}{8}s-\tfrac{75}{64}\quad\Longleftrightarrow\quad 128s^2-344s+225=0\quad\Longleftrightarrow\quad(8s-9)(16s-25)=0.$$

兩根為 $s=\frac{9}{8}$ 和 $s=\frac{25}{16}$。由於 $\frac{75}{88}<1<\frac{9}{8}$，兩者都在 t_1 之後。在 t_1 時，間距 $x_B-x_P=x_B(t_1)$ 為正，所以間距首次縮減至零的時刻是較小的根。因此下一次與擋板碰撞，是在開始後 $9T/8$ 的時刻，正如題目所求。（作為驗算，屆時兩者都位於 $x=\frac{3}{8}VT$。）

想一想 為甚麼必須取較小的根，而不是隨便取一個根？

這條二次方程所描述的，是假設兩者可以互相穿過時的運動。它的第二個根 $\frac{25}{16}T$，對應的是真正碰撞之後的一次「相遇」，但那時運動早已改變。實際的碰撞，是間距首次縮減至零的時刻。

驗算

- 當 $t=\frac{5}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{80}{32}+\frac{25}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$（以 VT 為單位），與 x_P 相等。
- 當 $t=\frac{9}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{144}{32}+\frac{81}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$，而 $x_P=\frac{11}{8}\cdot\frac{24}{88}=\frac{3}{8}$。
- 取 $V=T=1$（步長 10^{-6}）作逐步時間模擬，得出碰撞時刻為 $t\approx 0.6250$（反彈速度 -2.750）、$0.8523\approx\frac{75}{88}$ 及 1.1250。

常見錯誤

- 只對 P 本身的速率套用恢復定律，結果得出 $\frac{1}{2}V$ 而不是 $\frac{11}{4}V$。擋板正在運動，所以要用相對速度。
- 弄錯加速度的正負號。擋板起初朝牆壁運動，但正在減速，並在 $t=T$ 時掉頭。
- 忘記檢查在 P 從 AB 反彈之前，擋板不會先碰到 P（或牆壁）。

STEP 之外

這裏的巧妙之處，是在碰撞的瞬間改用擋板的參考系（frame of reference）來考慮。由於擋板的質量極大，恢復定律會把相對速度反向並按比例縮小，與固定的牆壁無異。這樣轉換參考系是大學一年級力學的核心技巧，並由此引伸出伽利略不變性（Galilean invari-

ance），以及二體碰撞中的質心參考系（centre-of-mass frame）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。