詳細解答

STEP III 1992，第 10 題

純數學 • 弧長與面積

> **STEP III 1992，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

關鍵思路

兩條曲線的周界（perimeter）都是弧長（arc length）積分，而且都無法用初等函數求出（它們是*橢圓積分*（elliptic integrals）），所以要證明兩者相等，唯一的方法就是把其中一個積分化成另一個。先寫出每條曲線的弧長元素，利用 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 化簡各自的被積函數（integrand），再作一次代換（substitution），加上一點對稱性，便可看出兩者其實是同一個積分。面積則較容易處理，因為兩者都可以直接計算出來。

（試卷上印出的範圍以 $\frac{1}{4}\theta$ 結尾。這顯然是 $\frac{1}{4}\pi$ 的誤印，我們取 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$。）

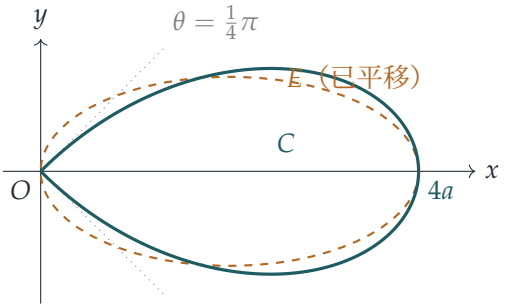
解答

描繪 C 的草圖

當 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ 時，我們有 $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $r = 4a\cos 2\theta > 0$ 恆成立（取 $a > 0$）。曲線有以下特徵：

- $r(-\theta) = r(\theta)$，所以 C 關於始線（initial line）對稱。
- 最大值 $r = 4a$ 在 $\theta = 0$ 處取得，即點 $(4a, 0)$。
- 當 $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$ 時，$r \to 0$，所以曲線會進入原點，並在該處與直線 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 相切。

所以 C 是單一個閉合環圈，也就是四瓣玫瑰線（rose）$r = 4a\cos 2\theta$ 的其中一瓣，沿正 x-軸伸展。下圖把它與 E 的一個複本畫在一起，該複本平移了 $2a$，使它橫跨同一個區間 $0 \le x \le 4a$。



C 的周界

對於極坐標（polar）曲線，弧長元素滿足 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。這裏 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$，所以

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

由於當 θ 走遍 $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ 時，環圈恰好被描畫一次，因此

$$\text{周界}C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $\phi = 2\theta$，於是 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$，而積分上下限變成 $\pm\frac{1}{2}\pi$：

$$\text{周界}C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

最後一步成立，是因為被積函數是 ϕ 的偶函數（even function）。

E 的周界

設 $x = 2a\cos\phi$，$y = a\sin\phi$，則

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

而當 ϕ 由 0 走到 2π 時，E 恰好被描畫一次，所以

$$\text{周界}E = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

? **想一想** 為甚麼 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的積分的四倍？

記 $g(\phi) = \sqrt{1+3\sin^2\phi}$。因為 $\sin^2(\pi-\phi) = \sin^2\phi$，$g$ 在 $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ 上的圖像是它在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的圖像的鏡像，所以 $\int_0^{\pi} g = 2\int_0^{\pi/2} g$。因為 $\sin^2(\phi+\pi) = \sin^2\phi$，$g$ 的周期為 π，所以 $\int_{\pi}^{2\pi} g = \int_0^{\pi} g$。（從幾何上看，橢圓在四個象限內的部分長度相等。）因此

$$\text{周界} E = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

這正好就是我們之前求得的 C 的周界的表達式。所以兩個周界相等，而我們從頭到尾都不必計算這個積分的值。

面積

極坐標曲線所圍的面積是 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用 $\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$，

$$\begin{aligned}\text{所圍面積} C &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4a^2\left[\theta + \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi a^2.\end{aligned}$$

至於橢圓，一條以逆時針方向描畫的閉合曲線所圍的面積是 $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$，由此得

$$\text{所圍面積} E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi + 2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi = 2\pi a^2.$$

（同樣地，這就是標準公式 $\pi \times$ 半軸 $\times$ 半軸 $= \pi(2a)(a)$。）所以兩個面積相等，同為 $2\pi a^2$。

驗算

- 取 $a = 1.7$，以 200 000 邊的多邊形逼近每條曲線，得出兩個周界均為 16.470362，與用森遜法則（Simpson's rule）算出的 $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 相等。所以每個周界約為 $9.6884a$。
- 同樣的多邊形給出兩個面積均為 $18.158406 = 2\pi(1.7)^2$。
- 對 C 的面積作一個合理性檢查：它位於長方形 $0 \le x \le 4a$，$|y| \le 1.1a$ 之內，該長方形的面積約為 $8.8a^2$，而 $2\pi a^2 \approx 6.3a^2$ 佔其中一個合理的比例。

常見錯誤

- 代入 $\phi = 2\theta$ 時，忘記了來自 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ 的因子 $\frac{1}{2}$。因子 $4a$ 對 C 而言會變成 $2a$，要到偶函數那一步之後才再次變回 $4a$。

- 計算極坐標面積時，用了 $\int r\,\mathrm{d}\theta$ 而不是 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。
- 把 $0 \le \theta < 2\pi$ 範圍內的整條玫瑰線 $r = 4a\cos 2\theta$ 當作 C。題目給定的範圍只選出其中一瓣。

STEP 之外

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 稱為第二類完全橢圓積分（complete elliptic integral of the second kind），它沒有初等的原函數（antiderivative）。這就是題目不准計算積分的原因：橢圓的周界並沒有閉合形式（closed form）。我們的積分是 $k^2 = -3$ 的情況。只要把 $\sin^2\phi$ 換成 $1 - \cos^2\phi$，再把 ϕ 換成 $\frac{1}{2}\pi - \phi$，便可把它改寫成 $0 < k < 1$ 的標準形式。橢圓積分引出了橢圓函數（elliptic functions）和橢圓曲線（elliptic curves），而這些都是現代數論的核心。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多 STEP 題目，同樣以這種方式比較極坐標曲線和參數（parametric）曲線的弧長和面積。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。