詳細解答

STEP III 1992，第 1 題

純數學 • 麥克勞林級數

> **STEP III 1992，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，那兩個恆等式（identity）就是一部製造導數（derivative）的機器：一旦把 f'' 用 f' 表示出來，再逐次求導便可得到所有更高階的導數，而在 $x = 0$ 處，一切都由 $f'(0) = \frac{1}{2}$ 構建而成。在第 (ii) 部分，麻煩在於因子 $\sinh x$，它在原點處等於零；乘以 x 便可消去這個零點，於是展開式就是兩個可以徒手求出的級數（series）之積。對稱性（奇函數（odd function）與偶函數（even function））預先告訴我們哪些冪次可能出現。

解答

第 (i) 部分

利用鏈式法則（chain rule）對 $f(x) = \ln(1 + e^x)$ 求導，

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

所以它的對數有定義，並且

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

這就是第一個結果。對這個恆等式求導，左邊得出 $f''(x)/f'(x)$，所以

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

正是所求。把它寫成 $f'' = f'(1 - f')$ 會較為方便。

? **想一想** 怎樣才能不必對 $\ln(1 + e^x)$ 求導四次，就得到 f''' 和 f''''？

直接對恆等式 $f'' = f' - (f')^2$ 本身求導，對 $(f')^2$ 使用積法則（product rule）：

$$f''' = f'' - 2f'f'' = f''(1 - 2f'),$$
$$f'''' = f'''(1 - 2f') - 2(f'')^2.$$

現在代入 $x = 0$，此時 $f(0) = \ln 2$ 而 $f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$：

$$f''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$f''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

根據麥克勞林定理（Maclaurin's theorem），$f(x) = \sum f^{(n)}(0)\, x^n/n!$，所以

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

其中 x^3 項為零（而 $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$）。

第 (ii) 部分

為何 g 沒有這樣的展開式。 一個只含非負冪次的級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ 在 $x = 0$ 處取有限值 a_0，並且在該處連續（continuous）。但 $\sinh 0 = 0$ 而 $\cosh 0 = 1$，所以當 $x \to 0$ 時，分母 $\sinh x \cosh 2x$ 趨向 0；事實上，由於 x 很小時 $\sinh x \approx x$，我們有 $g(x) \approx 1/x$，它在 0 附近是無界的（unbounded）。因此 $g(x)$ 在原點附近不可能等於這樣的級數。

為何 $xg(x)$ 有。 寫成

$$x\,g(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

由於 $\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$，因子 x 可以約去，於是

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

這是 1 除以一個常數項為 1 的級數；這樣的倒數可以用二項式展開（binomial expansion）寫成非負冪次的級數。同樣，$\cosh 2x \geq 1$ 永不為零，而 $1/\cosh 2x$ 亦可用同樣的方法展開。兩個這樣的級數之積仍是這樣的級數。

為何只有偶數冪次。 sinh 是奇函數而 cosh 是偶函數，所以 $g(-x) = -g(x)$：g 是奇函數。因此 $h(x) = x\,g(x)$ 滿足 $h(-x) = (-x)(-g(x)) = h(x)$，所以 h 是偶函數。若 $h(x) = \sum a_n x^n$，則 $h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ 為奇數}} a_n x^n$ 恆等於零，而由於恆等於零的冪級數（power series）所有系數皆為零，故對每個奇數 n 都有 $a_n = 0$。（你也可以直接看出這一點：上面兩個因子都是 x^2 的級數。）

展開式。 利用 $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$，取 $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$，並保留至 x^4 的各項，

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

因為 $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$。其次，$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$（來自 $\frac{(2x)^2}{2}$ 和 $\frac{(2x)^4}{24}$），所以取 $v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$，

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

把兩個級數相乘並按冪次整理：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{g}(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

因為 $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$。

驗算

- 第 (i) 部分中 x^3 項消失並非偶然：$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$ 是偶函數，所以在 $\frac{x}{2}$ 之後只會出現偶數冪次。
- 數值上，在 $x = 0.1$ 處：$\ln(1 + \mathrm{e}^x) \approx 0.7443966600$，與四次多項式 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$ 相差僅約 3.5×10^{-10}。
- 在 $x = 0.05$ 處，$x\,\mathrm{g}(x)$ 與 $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$ 相差約 9×10^{-8}，大約是 $6x^6$，與下一項為 x^6 項時的預期相符。

常見錯誤

- 把 $1/(1+u)$ 只展開成 $1 - u$：u^2 項對 x^4 有貢獻（即上面的 $\frac{1}{36}$ 和 $4x^4$）。
- 寫成 $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24}\cdots$，忘記了 $2x$ 的 4 次方是 $16x^4$。

STEP 之外

第 (ii) 部分談的是帶有極點（pole）的函數：g 像 $1/x$ 那樣趨向無窮，而乘以 x 便可消除這個奇點（singularity）。在複分析（complex analysis）中，這樣的函數有一個洛朗級數（Laurent series）$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{13}{6}x^2 + \cdots\right)$，而 $1/x$ 的系數（即留數（residue），這裏是

1）正是計算許多實積分的關鍵。這個級數的收斂半徑（radius of convergence）取決於分母最接近的另一個零點，即 $\cosh 2x = 0$ 之處 $x = \pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這些想法闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。