詳細解答

STEP II 1992，第 9 題

純數學 • 純量三重積

> **STEP II 1992，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

關鍵思路

把 $\mathbf{r}$ 的表達式重新整理成 $\mathbf{a}$ 加上 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的組合，便可看出它是通過 A、B 和 C 的平面。該平面的一個法向量（normal）是平面上兩個向量的向量積（cross product），而把這個向量積展開，恰好得出題目中的三個三重積（triple product）。此後，由於恆等式對所有 λ 和 μ 都成立，我們可以選取方便的數值。

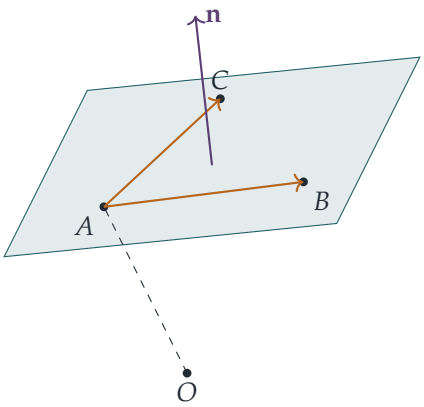
解答

軌跡

把方程改寫成

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

這就是點 A 加上向量 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 與 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的任意組合。這兩個向量並不平行：假如平行，A、B、C 便會共線，而一條直線連同 O 必定位於某個平面上，這與題設不符。因此，當 λ 和 μ 取遍所有實數時，$\mathbf{r}$ 掃出的就是**通過 A、B 和 C 的平面**。取 $(\lambda,\mu)=(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 便分別得到 A、B、C 三點本身。由於 O 不在平面 ABC 上，這個平面不通過原點。



方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

平面的法向量同時垂直於 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，所以我們取

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

由於這兩個向量不平行，它不是零向量。展開，並利用 $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$，得

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

平面上每一點與 A 相差的向量都垂直於 $\mathbf{n}$，所以 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$。由於 $\mathbf{a}$ 垂直於 $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$，亦垂直於 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

因此平面的方程是 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$。

? **想一想** 把 $\mathbf{r}$ 的參數形式（parametric form）代入後，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ 是甚麼？

我們需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$。在每一個之中，三項裏都有兩項消失，因為一個向量必定垂直於任何包含它的向量積：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

對於所有 λ、μ，點 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ 都在平面上，所以由 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$ 得

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

兩邊同時減去 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，得

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

對所有純量 λ、μ 都成立，這正是所要證明的。

推論

由於恆等式對所有 λ 和 μ 都成立，可選取能把個別項分離出來的數值。

- $\lambda = 1, \mu = 0$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$。
- $\lambda = 0, \mu = 1$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$。

兩式合起來便得

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

（換一個等價的說法：左邊是 λ 和 μ 的線性式，而且恆等於零，所以 λ 的係數和 μ 的係數都必須為零。）

當 A、B、C 和 O 共面時

這時 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 全都位於同一個通過 O 的平面上。$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 垂直於該平面（或為零向量），所以 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$，其餘兩個三重積同樣為零。從幾何上看，以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 為棱的平行六面體（parallelepiped）是扁平的，體積為零。結果依然成立，但只是平凡地成立：$0 = 0 = 0$。若 A、B、C 不共線，軌跡仍然是一個平面，但它通過原點，所以 $p = 0$，其方程為 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$。若 A、B、C 共線，則 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，軌跡只是一條直線（若三點重合，則只是一個點），所以這個論證得不出任何資訊。

驗算

- 取 $\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = \mathbf{j}$、$\mathbf{c} = \mathbf{k}$，三個三重積都等於 1，而 $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$p = 1$：平面為 $x + y + z = 1$，它確實包含這三點。
- 我們以精確分數運算測試了 2000 組隨機整數向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$：$\mathbf{n}$ 的展開式、p 的值、對隨機 λ、μ 的方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$，以及三個三重積相等，全部精確成立。對於共面的向量組，每個三重積都是 0。

常見錯誤

- 展開 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 時出現正負號錯誤：$-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ 一項變成 $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，而 $-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ 變成 $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$。
- 忘記說明為何 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，而這正是用上不共面條件（經由 A、B、C 不共線）的地方。

STEP 之外

純量三重積（scalar triple product）$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 就是以 **a**、**b**、**c** 為各行的 3×3 行列式（determinant），而這裏證明的循環對稱性，正是「把各行作循環置換（即兩次對換）不會改變行列式的值」這一事實。它的值是以這三個向量為棱的平行六面體的有向體積，並且恰好在三個向量線性相關（linearly dependent）時為零，也就是共面的情況。在大學一年級的課程中，這會發展成把行列式視為體積縮放因子的一般理論；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對此有清晰的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。