詳細解答

STEP II 1992，第 8 題

純數學 • 積分技巧

STEP II 1992，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q8

關鍵思路

三個標準技巧，每部分各用一個。在 (i) 中，我們把分母徹底因式分解（factorise），並留意到有一個重複因式，因此部分分式（partial fractions）需要包含平方項。在 (ii) 中，代換（substitution）$t = \tan\frac{x}{2}$ 可把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數，而這裏所得的二次式剛好可以漂亮地分解。在 (iii) 中，我們把 $\sinh x$ 寫成指數形式，再代入 $u = \mathrm{e}^x$，結果同樣歸結為部分分式。

解答

第 (i) 部分

由於 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，分母是 $(x-1)^2(x+1)$。因式 $x-1$ 重複出現，所以我們設

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

即

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

代入 $x=1$ 得 $1=2B$，所以 $B=\frac{1}{2}$。代入 $x=-1$ 得 $-1=4C$，所以 $C=-\frac{1}{4}$。比較 x^2 的係數得 $0=A+C$，所以 $A=\frac{1}{4}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\tfrac{1}{4}\ln|x+1|+c\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

設 $t=\tan\frac{x}{2}$。則

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

最後一式是因為 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+t^2)$。所以

$$3\cos x+4\sin x=\frac{3-3t^2+8t}{1+t^2}=\frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

而因式 $1+t^2$ 互相約去：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

? **想一想** 我們怎樣知道二次式 $3+8t-3t^2$ 可以因式分解？

它的判別式（discriminant）是 $64+36=100=10^2$，是一個完全平方數，所以它的根 $t=3$ 和 $t=-\frac{1}{3}$ 都是有理數。（這並非巧合：$3^2+4^2=5^2$，這也正是下文的諧波形式（harmonic form）振幅為整數的原因。）

現在寫 $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)}=\dfrac{a}{1+3t}+\dfrac{b}{3-t}$，於是 $2=a(3-t)+b(1+3t)$。代入 $t=3$ 得 $b=\frac{1}{5}$；代入 $t=-\frac{1}{3}$ 得 $\frac{10}{3}a=2$，所以 $a=\frac{3}{5}$。因此

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}&=\int\left(\frac{3}{5(1+3t)}+\frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{5}\ln|1+3t|-\tfrac{1}{5}\ln|3-t|+c\\ &=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c.\end{aligned}$$

另一方法：寫 $3\cos x+4\sin x=5\sin(x+\beta)$，其中 $\cos\beta=\frac{4}{5}$ 及 $\sin\beta=\frac{3}{5}$。則該積分為 $\frac{1}{5}\int\operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\ln|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)|+c$。兩個答案是一致的：由於 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$（因為 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{3/5}{9/5}$），由複角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

第 (iii) 部分

由於 $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，把分子和分母同乘以 e^x 得

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.$$

代入 $u = \mathrm{e}^x$，於是 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2 - 1} &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right| + c = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c,\end{aligned}$$

其中最後一步是把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{x/2}$：$\dfrac{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}} = \tanh\frac{x}{2}$。留意這與 (ii) 的另一方法中用到的 $\int \operatorname{cosec} x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$ 何其相似。

驗算

把每個答案求導。例如在 (iii) 中，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}$。數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）計算，(i) 的被積函數（integrand）的 $\int_2^5$ 為 0.548287，(ii) 的被積函數的 $\int_0^1$ 為 0.234276，而 $\int_{1/2}^2 \operatorname{cosech} x\,\mathrm{d}x$ 為 1.134488，各自與原函數（antiderivative）所得的值吻合至最少 12 個小數位。

常見錯誤

- 在 (i) 中，看漏了重複因式而只嘗試 $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1}$，又或者根本忘記了 $x^2 - 1$ 可以因式分解。
- 漏掉對數內的絕對值符號：當 $x - 1$、$1 + 3t$ 和 $\tanh\frac{x}{2}$ 取負值時，被積函數同樣有定義。
- 在 (ii) 中，忘記了來自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $\frac{2}{1+t^2}$。

STEP 之外

代換 $t = \tan\frac{x}{2}$（有時稱為魏爾斯特拉斯代換，Weierstrass substitution）說明了每一個關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數都有初等原函數（elementary antiderivative），因為部分分式可以處理 t 的任何有理函數。它背後是以有理函數對單位圓作出的參數化（parametrisation），而正是這個參數化生成了所有畢氏三元數組（Pythagorean triples）。至於究竟哪

些函數才有初等原函數，這類問題會引向劉維爾定理（Liouville's theorem）和微分代數（differential algebra）；關於積分的分析基礎，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。