詳細解答

STEP II 1992，第 7 題

純數學 • 三次方程的重根

> **STEP II 1992，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

關鍵思路

把 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 與該三次多項式比較係數（comparing coefficients），便可把 p、q 和 r 表示成根的對稱函數（symmetric functions）。在 (i) 中，有一個重根（repeated root），再加上「各根之和為零」，根的形式就只能是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$，其餘一切皆由此而來。至於 (ii)，題目中的式子看起來就像 (i) 的答案，只是 q 和 r 換成了較複雜的東西。這提示我們把 x 平移以消去 x^2 項，然後對新的三次多項式應用 (i)。

解答

由於 a, b, c 是根，而首項係數為 1，

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

對所有 x 成立。比較係數，得

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

第 (i) 部分

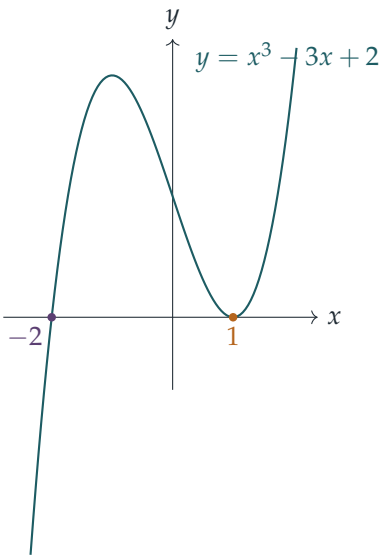
把各根標記成重根為 $a = b = \alpha$。那麼由 $p = 0$ 得 $c = -(a+b) = -2\alpha$，所以三個根是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$。因此

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

於是

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

這正是所要證明的。這裏完全不需要 α 是實數，而三重根的情況（$\alpha = 0$，所有係數為零）亦已包括在內。



例如，$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ 有 $\alpha = 1, q = -3, r = -2$，而 $4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$。二重根在圖像上表現為曲線與橫軸相切。

第 (ii) 部分

現在 p 不一定為零。原來的三次多項式各根之和為 p，所以它們的平均值是 $p/3$。按平均值平移，設

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

那麼 $y = x - \frac{p}{3}$，所以關於 y 的新三次多項式的根是 $a - \frac{p}{3}$, $b - \frac{p}{3}$, $c - \frac{p}{3}$。它們的和是 $p - p = 0$，而且若 a, b, c 之中有兩個相等，這三個數之中亦有兩個相等。

> **想一想** 關於 y 的三次多項式究竟是甚麼？

把每一項展開，

$$\begin{aligned}
\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3 + py^2 + \tfrac{p^2}{3}y + \tfrac{p^3}{27}, \\
-p\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2 - \tfrac{2p^2}{3}y - \tfrac{p^3}{9}, \\
q\left(y + \tfrac{p}{3}\right) &= qy + \tfrac{pq}{3},
\end{aligned}$$

再把這些連同 $-r$ 相加，y^2 項互相抵消（這正是平移的目的），得

$$x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y - \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right),$$

當中用到 $\frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{9} = -\frac{2p^3}{27}$。這個關於 y 的三次多項式具有 $y^3 - Py^2 + Qy - R$ 的形式，其中

$$P = 0, \qquad Q = q - \frac{p^2}{3}, \qquad R = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

它的 y^2 係數為零，並且有兩個相等的根，所以第 (i) 部分適用，得出 $4Q^3 + 27R^2 = 0$，即

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 = 0,$$

這就是所求的結果。

驗算

- 當 $p = 0$ 時，(ii) 的結果簡化為 $4q^3 + 27r^2 = 0$，即第 (i) 部分。
- 對於 $(x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$，我們有 $p = 4, q = 5, r = 2$，所以 $Q = -\frac{1}{3}$ 而 $R = \frac{128}{27} - \frac{20}{3} + 2 = \frac{2}{27}$。於是 $4Q^3 + 27R^2 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 0$。
- 我們亦以精確的有理數運算，在數百個隨機選取、帶有重根的三次多項式上測試了這兩個恆等式，並在隨機選取的點上檢驗了平移恆等式。

常見錯誤

- 韋達定理（Vieta's formulae）中的正負號出錯：本題選用的符號是 $-p, +q, -r$，因此 p, q, r 三者以根表示時全部帶正號。
- 按 $p/3$ 平移時弄錯方向。新三次多項式的根是 $a - \frac{p}{3}$ 等等，正因如此它們的和才是零。
- 在 (ii) 中硬用 a, a, c 把所有式子展開。這樣做行得通，但過程冗長又容易出錯；平移則可不費工夫地重用 (i)。

STEP 之外

對一般的三次多項式，(ii) 的左方等於 $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$，即判別式（discriminant）的相反數。它恰好在有兩個根重合時等於零，而它的正負號則告訴你一個實係數三次多項式是有三個實根還是只有一個。平移 $x = y + \frac{p}{3}$ 亦是以卡爾達諾公式（Cardano's formula）解三次方程的第一步。根的對稱函數、判別式，以及哪些方程可用根式求解（solved by radicals）的問題，都通往伽羅瓦理論（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是很好的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。