詳細解答

STEP II 1992，第 6 題

純數學 • 切線與根的計數

> **STEP II 1992，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

關鍵思路

方程 $kx = \ln(2\sec x)$ 的解，就是通過原點的直線 $y = kx$ 與曲線 $y = \ln(2\sec x)$ 相交的點。這條曲線從原點上方出發，是凸（convex）的，並且急升至無窮大，所以通過原點的直線要麼與它不相交，要麼與它相切，要麼與它相交兩次。特殊值 k_0 就是由原點所作切線的斜率（gradient）。相切（tangency）的意思是兩條曲線在該點高度相同、斜率也相同，而其餘一切都可以由這兩條方程推出。

解答

兩個圖像

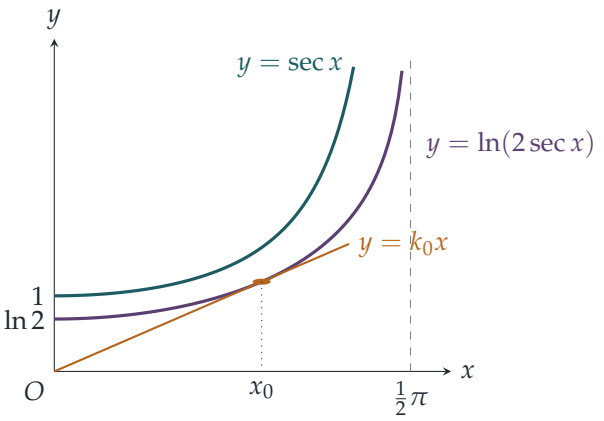
設 $f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$。則

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

所以 $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$，$f'(0) = 0$，$f$ 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，它是凸的（向上凹），而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 時 $f(x) \to \infty$，因為 $\cos x \to 0^+$。

同樣地，$y = \sec x$ 滿足 $\sec 0 = 1$，斜率為 $\sec x \tan x$，在 $x = 0$ 處為 0，其後為正，而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 時 $\sec x \to \infty$。兩條曲線都以 $x = \frac{1}{2}\pi$ 為鉛垂漸近線（vertical asymptote），並且在該處都沒有定義。

對數曲線永遠位於正割曲線的下方。設 $u = \sec x \geq 1$，則有 $\ln(2u) < u$，因為 $\ln(2u) - u$ 的導數（derivative）是 $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$，所以它不會超過它在 $u = 1$ 處的值，即 $\ln 2 - 1 < 0$。對數曲線的增長也慢得多：當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時，它的表現就像正割的 ln。



k 小時無解，k 大時有兩個解

由於 f 遞增，在 $[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上有 $f(x) \geq \ln 2$，而在該處 $kx < \frac{1}{2}\pi k$。若 $k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$，則處處都有 $kx < \ln 2 \leq f(x)$，所以直線從曲線下方經過，方程無解。

當 k 大時，直線起初在曲線下方（在 $x = 0$ 處它的高度是 $0 < \ln 2$），但它夠陡，會在某處升到曲線之上：在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處曲線的高度是 $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$，只要 $k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$，直線在該處就較高。在 $\frac{1}{2}\pi$ 附近，曲線趨向無窮大，而直線的高度始終不超過 $\frac{1}{2}\pi k$，所以曲線最終又回到直線之上。直線先向上穿過曲線，然後又向下穿過一次：有兩個解。

解不可能多於兩個。函數 $f(x) - kx$ 的二階導數（second derivative）是 $\sec^2 x > 0$，所以它是凸的，而凸函數最多只有兩個零點。

為何 k_0 存在

由於 $f(0) = \ln 2 \neq 0$，每個解都滿足 $x > 0$，所以我們可以除以 x，把方程改寫成

$$k = g(x), \qquad \text{其中} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以解的數目就是 g 的圖像到達高度 k 的次數。現在

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

而 $h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$。由於 $h(0) = -\ln 2 < 0$，而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時 $h(x) \to \infty$，h 恰好有一個零點 x_0。所以 g 在 $(0, x_0)$ 上遞減，在 $(x_0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，而且在兩端都有 $g \to \infty$（當 $x \to 0$ 時分子趨向 $\ln 2$，當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時分子趨向 ∞）。因此，取 $k_0 = g(x_0)$，即 g 的最小值，便有：

- $k < k_0$：無解；

- $k = k_0$：恰好有一個解，$x = x_0$；
- $k > k_0$：有兩個解。

從圖像來看，$y = k_0 x$ 就是 $y = \ln(2\sec x)$ 的通過原點的切線。這印證了草圖的論證，並準確地確定了臨界值。

> **想一想** 為甚麼「恰好有一個解」就表示直線是切線？

假如直線在 x_0 處橫截地穿過曲線，那麼把它繞 O 稍微轉動（令 k 稍為減小或增大），附近仍然會有一個交點，而上面的凸性論證又會給出第二個交點。一個單一而孤立的交點，在 k 減小時變成沒有交點，這正正就是切點。用代數來說，這就是 $h(x_0) = 0$，即 $g'(x_0) = 0$。

x_0 所滿足的方程

在切點處，直線與曲線的高度相同，斜率也相同：

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

（把兩式合起來，就是上面的 $h(x_0) = 0$。）把第二式代入第一式，得 $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$，而由於 $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$，$\tan x_0 \neq 0$，所以

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

這正是所要證明的。

求 x_0 和 k_0

我們很自然會想直接用 $x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$ 來迭代（iterate）。這樣做收斂（converge）得很慢：右邊在 x_0 處的導數是 $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$，所以迭代值會來回振盪，每一步只能逼近約 11%。對 $h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$ 使用牛頓法（Newton's method）則好得多，而且 $h'(x) = x\sec^2 x$ 十分簡單：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

由 $x_1 = 1$ 開始（全部以弧度（radian）計算）：

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

為確認準確至兩位小數，我們檢查符號有否改變：$h(0.905) \approx -0.023 < 0$ 而 $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$，所以 $0.905 < x_0 < 0.915$，於是

$$x_0 \approx 0.91.$$

然後 $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$。等價地，$k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$，所得的值相同。

驗算

- k_0 的兩個表達式互相吻合：$\tan(0.91440) \approx 1.2981$ 而 $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$。
- 以數值方法在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上掃描 $g(x) = \ln(2\sec x)/x$，得最小值為 1.2981，位於 $x \approx 0.914$。
- 數算 $kx - \ln(2\sec x)$ 的符號改變次數：$k = 1.29$ 時沒有根，$k = 1.31$ 時有兩個根。
- 答案符合先前求得的粗略界限：$0.44 < k_0 < 1.32$。

常見錯誤

- 使用角度制。這裏每一個 x 的值，包括牛頓法的迭代值和 $\tan x_0$，都必須以弧度計算。
- 只列出一條相切的方程。與曲線相交並不足夠：斜率也必須相等，而正是這第二個條件確定了 k_0。
- 未經檢查就聲稱準確至兩位小數。應展示 h 在 $[0.905, 0.915]$ 兩端符號相反，或者一直迭代至第二位小數穩定下來。

STEP 之外

透過考察 $f(x)/x$ 的值域（range）來數算 $kx = f(x)$ 的根的數目，是一個重要思想的一小部分。通過原點的切線，加上 f 的凸性，正是勒讓德變換（Legendre transform）和凸對偶（convex duality）的基礎，在分析學和力學中都是如此。牛頓法在這裏收斂得這麼快，是因為它在單根（simple root）附近是二次收斂（quadratically convergent）的，而不動點迭代（fixed-point iteration）只是線性收斂，比率為 $|\varphi'(x_0)|$。這兩個事實在分析學或數值方法的入門課程中都會證明。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）涵蓋了凸函數以及牛頓法的誤差分析。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。