詳細解答

STEP II 1992，第 4 題

純數學 • 微分法的公理

> **STEP II 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 6.5 節從公理出發的微分法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/derivations.html

關鍵思路

這四條規則正是我們熟悉的求導（differentiation）性質：乘積法則（product rule）、線性（linearity）以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$。題目要我們證明，單憑這些性質，就足以完全確定這個運算在多項式（polynomial）上的作用。處理常數的竅門，是把一個我們早已知道結果的乘積交給乘積法則，例如 $1 \times 1 = 1$。之後，乘積法則會逐步建立 x 的每一個冪，餘下的則由線性處理。

在整個過程中，我們只可使用題目給出的四條規則。不能因為 $\Diamond$ 看起來像求導，就假設它具有任何性質；這正是我們要證明的事。

解答

常數

> ? **想一想** 我們對 $\Diamond 1$ 一無所知。這些規則怎樣能告訴我們它是甚麼？

把乘積法則 (i) 應用於多項式 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = 1$。它們的乘積仍是 1，所以

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\,\Diamond 1.$$

兩邊同時減去 $\Diamond 1$，得 $\Diamond 1 = 0$，即零多項式（zero polynomial）。

現設 $\mathrm{f}(x) = c$ 為任意常數多項式。則 $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$，而 c 是常數，所以由規則 (iv) 得

$$\Diamond c = \Diamond(c \cdot 1) = c \Diamond 1 = c \cdot 0 = 0.$$

這也涵蓋了 $c = 0$ 的情況，所以對每一個常數多項式都有 $\Diamond \mathrm{f}(x) = 0$，正如所求。

（求得 $\Diamond 1 = 0$ 的另一途徑：寫成 $x = x \cdot 1$，則由規則 (i) 和規則 (iii) 得 $1 = 1 \cdot 1 + x \Diamond 1$，因此 $x \Diamond 1 = 0$，而一個多項式乘以 x 後得 0，它必定是零多項式。）

冪 x^2 和 x^3

取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$ 並使用乘積法則，再用規則 (iii)，

$$\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x \Diamond x + x \Diamond x = x + x = 2x.$$

接着，$x^3 = x^2 \cdot x$，所以由乘積法則、規則 (iii) 和剛剛得到的結果，

$$\Diamond x^3 = x \Diamond x^2 + x^2 \Diamond x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

任意多項式

*第 1 步：x 的冪。*我們用歸納法（induction）證明

$$\Diamond x^n = nx^{n-1} \qquad \text{對每一個整數} n \geq 1.$$

當 $n = 1$ 時，這就是規則 (iii)。假設它對某個 $n = k \geq 1$ 成立。寫成 $x^{k+1} = x^k \cdot x$ 並使用乘積法則，再用規則 (iii) 和歸納假設（induction hypothesis），

$$\Diamond x^{k+1} = x \Diamond x^k + x^k \Diamond x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

所以結果對 $n = k+1$ 成立。由歸納法，它對所有 $n \geq 1$ 成立。當 $n = 0$ 時，$x^0 = 1$ 是常數，所以由第一部分得 $\Diamond x^0 = 0$。在每一種情況下都有 $\Diamond x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$。

*第 2 步：和。*規則 (ii) 只是就兩個多項式而言，但對項數作歸納，便可把它推廣至任意有限和：若 $\Diamond(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \Diamond \mathrm{f}_1 + \cdots + \Diamond \mathrm{f}_m$，則把規則 (ii) 應用於 $(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$，便得到 $m+1$ 項時的同一命題。

*第 3 步：綜合起來。*任意多項式都可寫成 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，其中係數 a_k 為常數。先用第 2 步，再對每一項用規則 (iv)，然後用第 1 步，

$$\begin{aligned}
\Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond(a_0) + \Diamond(a_1 x) + \cdots + \Diamond(a_n x^n) \\
&= a_0 \Diamond 1 + a_1 \Diamond x + \cdots + a_n \Diamond x^n \\
&= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big),
\end{aligned}$$

這正是我們要證明的結果。

驗算

值得確認一下求導確實滿足全部四條規則，否則這個結果便會流於空泛；它確實滿足（乘積法則、線性以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$）。我們亦按照解答中的做法，只用這四條規則在電腦上構作了 $\lozenge$，並以 500 個次數不超過 7、係數為分數的隨機多項式，把它與普通的導數（derivative）作比較。兩者每次都一致，並且與數值差商（difference quotient）吻合；例如由這些規則可得 $\lozenge x^3 = 3x^2$。

常見錯誤

- 說「$\lozenge c = 0$，因為常數的導數是零」。這是假設了我們要證明的事；這個零必須由規則推出。
- 在最後一部分遺漏常數項。歸納法只由 $n = 1$ 開始，所以 a_0 需要用到關於常數的結果。
- 對多項之和使用規則 (ii)，卻沒有指出它是藉歸納法由兩項推廣而來。

STEP 之外

滿足規則 (i)、(ii) 和 (iv) 的運算稱為導子（derivation），代數和幾何中處處都會研究導子。本題說明，在多項式上，導子完全由它在 x 上的值決定。更一般地，$\lozenge \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$，其中 $\mathrm{p} = \lozenge x$；在微分幾何（differential geometry）中，這個想法成為向量場（vector field）的定義。至於多項式環（polynomial ring）這個代數背景，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。