詳細解答

# STEP II 1992，第 3 題

純數學 • 內擺線與面積

**STEP II 1992，第 3 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q3

## 關鍵思路

一切都源自純滾動而不滑動（rolling without slipping）：小圓沿大圓滾過的弧長，等於小圓上曾經與大圓接觸的弧長。這就決定了小圓轉了多少，於是 $B$ 不過是「圓心 $P$ 加上一個方向正確的單位向量（unit vector）」。至於描繪曲線，值得留意的是，利用三倍角公式（triple-angle formulae），坐標可以化簡得非常簡潔。

## 解答

### 求 $B$ 的坐標

由於小圓（半徑為 1）一直與大圓（半徑為 4）的內側相切，它的圓心與 $O$ 的距離恆為 $4-1=3$。設 $\phi$ 為角 $AOP$，則

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

設 $T$ 為當前的切點（point of contact）。它位於射線 $OP$ 的延長線上，所以 $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$，而由 $P$ 到 $T$ 的方向與 $x$ 軸成角 $\phi$。

起初 $B$ 位於切點 $A$。由於沒有滑動，大圓上的弧 $AT$ 與小圓上的弧 $BT$ 長度相同：

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

**想一想** 在 $P$ 處量度，$B$ 所在的角度是 $\phi + 4\phi$ 還是 $\phi - 4\phi$？

當 $P$ 繞 $O$ 逆時針移動時，小圓沿大圓的內側滾動，因此是順時針轉動的（見圖中箭頭）。點 $B$ 是較早時的切點，所以它落在新切點 $T$ 的後面：沿小圓由 $T$ 到 $B$ 是順時針轉了 $4\phi$。

因此方向 $\overrightarrow{PB}$ 與 $x$ 軸成角 $\phi - 4\phi = -3\phi$，又因為 $PB = 1$，

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

正如所求。（驗算：$\phi = 0$ 給出 $(4, 0) = A$。）

**描繪 $C$**

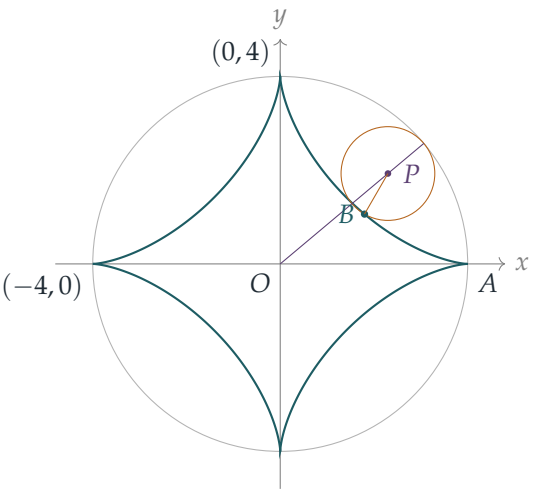
利用 $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ 及 $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$，

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

所以 $C$ 是曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$，即星形線（astroid）。它有以下特徵：

- $B$ 在大圓上，當且僅當 $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$，即 $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$，對應的點為 $(\pm 4, 0)$、$(0, \pm 4)$。這時 $B$ 就是切點，所以它瞬時靜止，曲線在該處有一個尖點（cusp）。
- 曲線對兩條坐標軸都對稱（把 $\phi$ 換成 $-\phi$ 或 $\pi - \phi$）。
- 在第一象限，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$，所以曲線沿 $x$ 軸方向離開 $(4, 0)$，並沿 $y$ 軸方向到達 $(0, 4)$。曲線向內彎曲：當 $\phi = \frac{\pi}{4}$ 時它通過 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，遠在直線 $x + y = 4$ 之內。

$P$ 繞行一周（$\phi$ 由 0 到 $2\pi$）之後，小圓相對於 $OP$ 轉了 3 圈，而 $B$ 回到 $A$，所以 $C$ 是一條有四個尖點的閉曲線（closed curve）。



**面積**

我們有 $x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

所以

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

在一個完整週期上，對任何整數 $k \neq 0$ 都有 $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$（把被積函數寫成 $\frac{1}{2}(1 + \cos 2k\phi)$），而

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

因此

$$\text{面積} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

答案為正數，這是應有的結果：隨着 $\phi$ 增加，$B$ 沿 $C$ 逆時針繞行。

## 驗算

- 由於 $C$ 向內彎曲，所圍區域位於以四個尖點為頂點的正方形之內，該正方形的面積為 32；而確實 $6\pi \approx 18.85 < 32$。
- 數值上，對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule），以及用鞋帶公式（shoelace formula）計算 $C$ 的內接 200 000 邊形的面積，兩者都給出 $18.8496\ldots = 6\pi$。
- 標準的星形線公式（面積為 $\frac{3}{8}\pi a^2$），取 $a = 4$，同樣給出 $6\pi$。
- 在每個尖點處，$B$ 的速率的數值結果為零，印證了 $B$ 碰到大圓時處於靜止狀態，與滾動的要求完全吻合。

## 常見錯誤

- 把 $\overrightarrow{PB}$ 的角度取為 $+5\phi$ 或 $+3\phi$：小圓的轉動方向與 $P$ 繞 $O$ 運動的方向相反。
- 計算 $P$ 的路徑時用了半徑 4 而不是 3。
- 把尖點畫成圓滑的末端，或把弧畫成向外凸出。

## STEP 之外

一個圓在另一個圓內滾動時，圓上一點所描出的曲線稱為內擺線（hypocycloids）；在外面滾動則得到外擺線（epicycloids）。當半徑之比為 4：1 時，我們得到星形線；比為 3：1 時，則得到有三個尖點的三尖瓣線（deltoid）。面積公式 $\int x\,\mathrm{d}y$ 是格林定理（Green's theorem）的特殊情況，該定理把沿閉曲線的積分與曲線所圍區域上的二重積分（double integral）聯繫起來；它是大學一年級向量微積分（vector calculus）的一大亮點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）利用 $z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$ 優雅地處理了這些滾動曲線。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。