詳細解答

STEP II 1992，第 2 題

純數學 • 克萊羅微分方程

> **STEP II 1992，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

關鍵思路

這條方程的形式是 $y = xp - f(p)$，其中 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，稱為克萊羅方程（Clairaut equation）。求導一次後，麻煩的 p 項會互相抵消，餘下的式子可以因式分解成兩條簡單得多的方程。要留意的是，求導會丟失資訊（常數消失了），所以每個候選解都必須代回 $(*)$，才能定出當中的常數。

解答

設 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，則 $(*)$ 可寫成 $y = xp - \cosh p$。

求導

把等式兩邊對 x 求導，對 xp 用積法則（product rule），對 $\cosh p$ 用鏈式法則（chain rule）：

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

兩邊的 p 互相抵消，餘下

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x - \sinh p) = 0, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

乘積為零，當且僅當其中一個因子為零，所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 或 $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$，正是題目所求。

兩條方程

第一條方程。把 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 積分兩次，得通解（general solution）

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ 為任意常數。}$$

第二條方程。這裏 $\sinh p = x$。由於 sinh 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），所以對每個 x 都有 $p = \sinh^{-1} x$。用分部積分法（integration by parts），取 $u = \sinh^{-1} x$，$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ 為任意常數。} \end{aligned}$$

$(*)$ 的解

$(*)$ 的每個解都滿足上面推導出的兩條方程之一，但反過來卻不成立，因為求導時丟掉了一個條件。所以我們要把每一族解代回 $(*)$。

> **想一想** 推導出的兩條方程分別有兩個和一個任意常數。為甚麼這些解不可能全部都滿足像 $(*)$ 這樣的一階方程？

一階方程的解應該是單參數族，而上面每一族解不是常數太多，就是有一個尚未驗證的常數。把 $(*)$ 求導，只能告訴我們 $y - xp + \cosh p$ 是常數；我們還需要這個常數等於零。

直線。當 $y = Ax + B$ 時，$p = A$，於是 $(*)$ 變成

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

所以我們得到單參數的直線族

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

另一條曲線。當 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ 時，$p = \sinh^{-1} x$，所以 $\sinh p = x$，而 $\cosh p = \sqrt{1 + \sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$（因為 $\cosh p > 0$，故取正根）。於是 $(*)$ 的右邊是

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

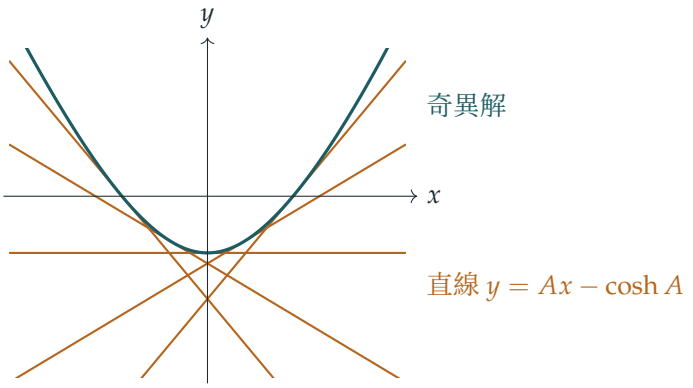
它等於 y，當且僅當 $C = 0$。這樣便多得一個解，當中不含任意常數：

$$y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}.$$

因此，$(*)$ 的解是直線 $y = Ax - \cosh A$（A 為任意實數），加上單獨一條曲線 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}$。

兩者如何配合

斜率為 A 的直線在 $x = \sinh A$ 處與曲線相切。在該處，曲線的斜率是 $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$，高度是 $A\sinh A - \cosh A$，與直線的相同。曲線的 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$，所以它是凸（convex）的，而每一條這樣的切線都位於它的下方。這條曲線是該直線族的包絡線（envelope），稱為奇異解（singular solution）。



這也解釋了一個微妙之處：由於條件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$ 是逐點成立的，一個解可以在兩種類型之間切換。例如，沿着曲線走到 $x = \sinh A$，然後改沿該處的切線繼續走，所得的函數有連續的導數，而且仍然處處滿足 $(*)$。這類分段的解都是由上面找到的解拼合而成的，而題目預期的答案是直線族加上奇異曲線。

驗算

- 當 $A = 0$ 時，直線是 $y = -1$，而曲線有 $y(0) = 0 - 1 = -1$，斜率為 $\sinh^{-1} 0 = 0$：兩者在 $(0, -1)$ 相切，與預期相符。
- 數值上，取 $x = 0.7$：$\sinh^{-1} 0.7 \approx 0.6527$，所以曲線給出 $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$，而 $xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$，兩者吻合。在 y 上加上任何 $C \neq 0$，都會剛好相差 C。
- 在隨機選取的點上用有限差分（finite differences）檢驗 $(*)$，每一條直線 $y = Ax - \cosh A$ 和奇異曲線的殘差都只有捨入誤差的大小。

常見錯誤

- 做到 $y = Ax + B$ 或 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ 便停下來：這些只是求導後的方程的解，而 $(*)$ 本身要求 $B = -\cosh A$ 和 $C = 0$。

▶ 把因子 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$「約去」，以致完全漏掉奇異解。

STEP 之外

形如 $y = xp - f(p)$ 的方程就是克萊羅方程。它們的通解永遠是直線族 $y = cx - f(c)$，而奇異解就是這個直線族的包絡線。這裏 $f = \cosh$，而包絡線 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}$ 是 cosh 的勒讓德變換（Legendre transform），這種構造在力學（由拉格朗日量（Lagrangian）過渡到哈密頓量（Hamiltonian））和熱力學中都會出現。這個例子也說明，當存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的條件不成立時，一階方程的解不一定唯一。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋一階方程和這條唯一性定理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。