詳細解答

STEP II 1992，第 15 題

概率與統計 • 隨機漫步

> **STEP II 1992，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

關鍵思路

若該點在 s 步之中有 R 步向正方向走，它最後會停在 $x = R - (s - R) = 2R - s$，而 R 服從二項分佈（binomial distribution）。因此，這裏每一個概率都是若干個二項式係數（binomial coefficients）之和。奇偶性（parity）幫了很大的忙：走了偶數步之後，只可能到達 $x = 2$ 和 $x = 4$；走了奇數步之後，只可能到達 $x = 3$ 和 $x = 5$，所以每個 $\mathrm{P}(s)$ 都只是兩個相鄰二項式係數之和。帕斯卡法則（Pascal's rule）隨即把這個和化簡為單一個係數。至於最大值，則要考察相鄰兩項之比（ratio），並把 s 為偶數和奇數的情況分開處理。

解答

設 R 為首 s 步中向正方向走的步數。各步互相獨立（independent），每一步向正方向走的概率為 $\frac{1}{2}$，所以 $R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$，而且

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

走了 s 步之後的位置是 $X = 2R - s$，所以 $X = x$ 當且僅當 $R = \frac{1}{2}(s + x)$。特別地，X 的奇偶性與 s 相同。

$\mathrm{P}(5)$ 與 $\mathrm{P}(6)$ 的值

當 $s = 5$ 時，只有 $x = 3$ 和 $x = 5$ 可能出現，分別需要 $R = 4$ 和 $R = 5$：

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

當 $s = 6$ 時，只有 $x = 2$ 和 $x = 4$ 可能出現，分別需要 $R = 4$ 和 $R = 5$：

$$\mathrm{P}(6) = \left[\binom{6}{4} + \binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6} = \frac{15+6}{64} = \frac{21}{64}.$$

一般的偶數情況

當 $s = 2k$ 時，可能到達的目標點是 $x = 2$ 和 $x = 4$，分別需要 $R = k+1$ 和 $R = k+2$。根據帕斯卡法則 $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$，

$$\mathrm{P}(2k) = \left[\binom{2k}{k+1} + \binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

最後一步用了 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$，其中 $(2k+1) - (k+2) = k-1$。這就是所要求的結果。它在 $k = 1$ 時同樣成立：這時 $\binom{2}{3} = 0$，所以 $x = 4$ 的那一項根本不存在，而公式給出 $\frac{1}{4}$，正是兩步都向正方向走的概率。

奇數情況

當 $s = 2k+1$ 時，目標點是 $x = 3$ 和 $x = 5$，分別需要 $R = k+2$ 和 $R = k+3$。同理，

$$\mathrm{P}(2k+1) = \left[\binom{2k+1}{k+2} + \binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

當 $k = 2$ 時，這給出 $\binom{6}{1}/32 = \frac{3}{16}$，與 $\mathrm{P}(5)$ 吻合。

最大值

對 $k \geq 1$ 記 $a_k = \mathrm{P}(2k)$，並對 $k \geq 1$ 記 $b_k = \mathrm{P}(2k+1)$（留意 $b_0 = \mathrm{P}(1) = 0$）。這些數全是正數，所以我們可以用比值來比較相鄰兩項。

> **想一想** 兩個二項式係數之比應該怎樣化簡？

把兩者都寫成階乘（factorials）再約簡。對於偶數項，

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}} = \frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

所以

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)} = \frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

由於分母是正數，這個比值大於 1 當且僅當 $10k+6 > 12k$，即 $k < 3$；當 $k = 3$ 時它等於 1；而當 $k > 3$ 時它小於 1。因此

$$a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > \cdots,$$

而偶數步的最大值是 $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$。（驗算：$\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$。）

對於奇數項，同樣的約簡給出

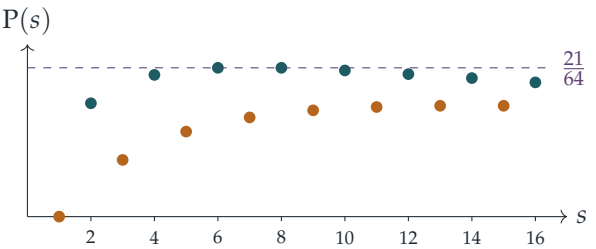
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

它在 $k < 6$ 時大於 1，在 $k = 6$ 時等於 1，在 $k > 6$ 時小於 1。所以奇數步的最大值是

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

最後，$\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$，所以沒有任何奇數步的值能超過偶數步的最大值。因此 $\mathrm{P}(s)$ 取得最大值 $\frac{21}{64}$ 的時候，是

$$s = 6 \quad 及 \quad s = 8.$$



藍綠色的點對應偶數 s，琥珀色的點對應奇數 s：這是兩個獨立的數列，各自先升後降，而偶數的那個始終在上方。

驗算

- 用手計算小的情況：$\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$（兩步都向右），$\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$（三步都向右）；而取 $k = 1$ 時，公式給出 $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$ 和 $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$，正如所料。
- 用電腦對這個漫步作精確窮舉（以分數運算，$s \le 60$），結果證實兩條公式都正確，$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$ 是整體的最大值，而 $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$ 是奇數步的最大值。

常見錯誤

- 對每個 s 都把全部四個目標點加起來：基於奇偶性，其中一半根本不可能到達。
- 求出偶數步的最大值便停下來。奇數步的值構成另一個獨立的數列，你必須驗證它的峯值較低。

▶ 停在「比值 > 1 對 $k < 3$ 成立」便只答 $s = 6$：比值在 $k = 3$ 時等於 1，所以 $s = 8$ 與它並列。

STEP 之外

這就是簡單對稱隨機漫步（simple symmetric random walk），是概率論的核心對象之一。走了 s 步之後，它的位置擴散的幅度大約與 $\sqrt{s}$ 成正比，所以它落在任何一個固定有限範圍內的概率會先上升，最終下降至零；$s = 7$ 附近的峯值，正是擴散幅度與該範圍大小相若的時候。同樣的二項式計數方法還會引出反射原理（reflection principle），以及一維漫步以概率 1 返回原點這個事實。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）中有一章講隨機漫步，寫得很好。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。