詳細解答

STEP II 1992，第 14 題

力學 • 連接質點與滑輪

STEP II 1992，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q14

關鍵思路

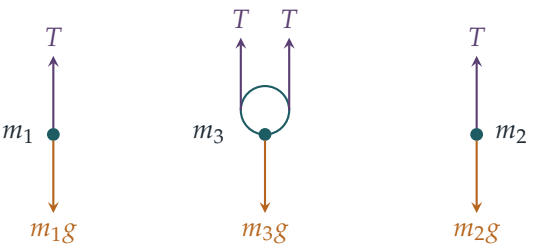
系統中有三個運動的物體，但只有一條繩，所以整條繩的張力（tension）都是同一個 T，而三個加速度（acceleration）之間只有一個約束條件。對每個質點寫出牛頓第二定律（Newton's second law）（滑輪 P_3 與掛在它上面的質點一起運動），再寫出繩長條件，便得到四個未知數的四條線性方程。至於靜止的條件，不過是說 P_3 的加速度為零。

解答

模型

滑輪（pulley）光滑而輕，繩輕而不可伸長（inextensible），所以整條繩上的張力處處相同，都等於 T。由於 P_3 是輕滑輪，它與質量為 m_3 的質點合成一個質量為 m_3 的物體，由兩段豎直的繩吊着，每段繩都以力 T 把它向上拉。

所有位移一律以向下為正：設 x_1、x_2、x_3 分別為質點 m_1、質點 m_2 和滑輪 P_3 在固定滑輪以下的深度，對應的加速度為 a_1、a_2、a_3（向下為正）。



運動方程

對每個物體沿豎直方向分解（向下為正）：

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T, \\ m_3 a_3 &= m_3 g - 2T. \end{aligned}$$

繩的約束條件

略去繞在滑輪上的固定長度不計，這條繩由以下各段組成：由 P_1 垂下至 m_1 的一段（長度 x_1）、由兩個固定滑輪垂下至 P_3 的兩段（每段長度 x_3），以及由 P_2 垂下至 m_2 的一段（長度 x_2）。由於繩不可伸長，

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{常數}, \qquad \text{所以} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

後一式由前一式求導兩次而得。

> **想一想** 為甚麼 x_3 的係數是 2 而不是 1？

當 P_3 下降距離 d 時，吊着它的兩段繩都各自長了 d，所以共用去 $2d$ 的繩。這些繩只能來自外側的兩段，因此 $x_1 + x_2$ 減少 $2d$。漏掉這個因子，是這道題最常見的出錯原因。

張力

把每條運動方程除以對應的質量，

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

代入 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$：

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

全式乘以 $m_1 m_2 m_3$，再解出 T，

$$\boxed{T = \frac{4 m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2}}$$

這個結果在整個運動過程中都成立（直至有質點碰到滑輪為止），因為方程中沒有任何一項與位置有關。

P_3 保持靜止的情況

系統由靜止開始運動，所以 P_3 保持靜止，當且僅當 $a_3 = 0$，即 $2T = m_3 g$。代入上面求得的 T：

$$\begin{aligned} \frac{8m_1m_2m_3\,g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2} &= m_3 g \\ \iff \quad 8m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2 \\ \iff \quad 4m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2), \end{aligned}$$

其中我們除以了 $m_3 g > 0$，並乘以了為正數的分母。所以若 $4m_1m_2 = m_3(m_1+m_2)$，則 $a_3 = 0$，P_3 保持靜止，正是所要證明的。（每一步都可逆，所以這個條件既是充分條件，也是必要條件。）

要留意，外側的兩個質點不一定靜止：這時 $T = \frac{1}{2}m_3 g$，而 $a_1 = g - T/m_1 = -a_2$，除非 $m_1 = m_2$，否則不為零。一個質點上升，另一個以相同的快慢下降，繩在 P_3 下面滑過，卻沒有帶動它。

驗算

- 對稱情況 $m_1 = m_2 = m$：條件變成 $4m^2 = 2mm_3$，即 $m_3 = 2m$。這不過是靜力平衡，$2T = 2mg = m_3 g$：結果顯而易見，也令人放心。
- 若 $m_3 \to \infty$，則 $T \to \dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$，是大家熟悉的阿特伍德機（Atwood machine）張力 $\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$ 的兩倍。這是合理的：很重的 P_3 近乎自由下落，$a_3 \to g$，所以各段繩加速得很快。若 $m_3 \to 0$，則 $T \to 0$，因為無質量的滑輪不能承受任何淨力。
- 數值上，取 $m_1 = 2$、$m_2 = 3$、$m_3 = 4$ 及 $g = 9.8$（國際單位制），公式給出 $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$。另外用能量方法（拉格朗日方法，Lagrangian method）獨立求解，得到相同的加速度 $a_1 \approx -0.891$、$a_2 \approx 2.673$、$a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。取 $m_1 = 1$、$m_2 = 3$、$m_3 = 3$ 時，靜止條件成立，而果然 $a_3 = 0$，同時 $a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。

常見錯誤

- 把約束條件寫成 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$，忘記了 P_3 是掛在兩段繩上的。
- 忘記了作用在 P_3 上的力是 $2T$，而不是 T。
- 以為 P_3 靜止，整個系統就必定靜止。除非 $m_1 = m_2$，否則並非如此。

STEP 之外

約束條件 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 常數 把系統的自由度（degrees of freedom）減至兩個，而處理這類系統最簡潔的方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）：只要用獨立的坐標寫出能量，就完全用不着張力（它是一種「約束力」（constraint force））。我們的數值驗算正是這樣做的。你會在大學一年級的動力學課程中學到它。想看看牛頓定律怎樣嚴謹地應用於滑輪這類受約束的系統，Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是個好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。