詳細解答

STEP II 1992，第 13 題

力學 • 摩擦力與連接質點

STEP II 1992，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

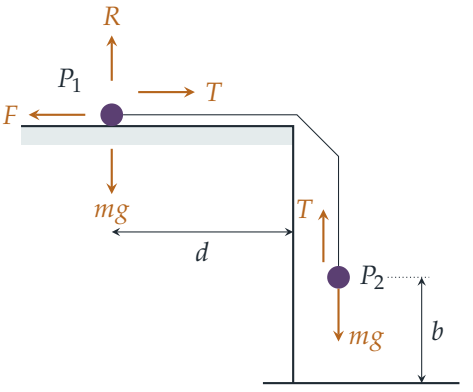
step.maths.org/questions/92-s2-q13

關鍵思路

整個運動分為兩個階段。P_2 下墜期間，繩子拉緊，兩個質點（particle）以同一個加速度一起運動。P_2 一撞到地面，繩子便鬆弛，P_1 只會在摩擦力（friction）作用下滑行至停下。一切都取決於碰撞一刻的速率：第一部分是把停下所需的距離與距離桌邊尚餘的距離作比較，第二部分則是比較兩段時間。

解答

我們把 P_1 和 P_2 視為質點，並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），繞過光滑的桌邊，因此整條繩子的張力（tension）T 處處相同。桌面對 P_1 而言是粗糙的。我們假設 $b < d$，使得 P_2 在 P_1 到達桌邊之前已經着地（繩子的長度此後再無作用）。



第一部分

第一階段：繩子拉緊。對 P_1 沿豎直方向分解力，得 $R = mg$。它正在滑動，所以摩擦力達到極限值（limiting friction）：$F = \mu R = \mu mg$，方向與運動相反。設共同加速度為 a，

$$P_2 \text{ (向下)}: \quad mg - T = ma,$$
$$P_1 \text{ (朝向桌邊)}: \quad T - \mu mg = ma.$$

兩式相加，$2ma = mg(1-\mu)$，所以 $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$；由於 $\mu < 1$，這是正數，系統確實會開始運動。P_2 由靜止下墜距離 b，所以它到達地面時的速率 V 滿足

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

此刻 P_1 的速率同樣是 V，而且它已移動了距離 b，所以它距離桌邊 $d-b$。

第二階段：繩子鬆弛。碰撞之後，P_2 在地面上或正在向上彈起，而 P_1 繼續向桌邊移動，所以繩子鬆弛，$T = 0$。

> **想一想** 為甚麼 P_2 彈跳期間繩子不會再次拉緊？

碰撞一刻繩子剛好拉緊。其後 P_1 向桌邊靠近，讓更多繩子越過桌邊垂下，而 P_2 不會低於地面，所以它所需的繩子不會比碰撞時多。繩子自此一直保持鬆弛。

因此 P_1 只以 μg 減速，並在再移動距離

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

之後停下，前提是它沒有先到達桌邊。故此 P_1 掉下桌子，當且僅當（if and only if）$s > d-b$：

$$\frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d-b \iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{兩邊乘以} 2\mu > 0)$$
$$\iff b > \mu(2d-b)$$
$$\iff \mu < \frac{b}{2d-b},$$

其中最後一步是除以 $2d-b$，因為 $d > b$，這是正數。每一步都可逆，所以這正是所要求的「當且僅當」。（若 μ 等於 $b/(2d-b)$，P_1 剛好停在桌邊，不會掉下。）

第二部分

現在 $\mu > b/(2d-b)$，所以 P_1 會停在桌上。由 P_2 第一次撞到地面的一刻起計時。在那一刻兩個質點的速率都是 V。

P_1：由速率 V 起以 μg 減速，經過時間

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

後停下。

P_2：根據牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），它以速率 eV 反彈。由於繩子鬆弛，它只在重力作用下自由運動，所以當 $eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 時它返回地面，即經過時間

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

（碰撞是瞬時的，所以第一次彈跳不耗時間。）

P_1 在第二次彈跳之前停下，正正就是 $t_1 < t_2$ 的時候：

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

這裏除以了 $V/g > 0$。所以若 $e > 1/(2\mu)$，P_1 會在 P_2 第二次彈跳之前停下，正如所求。事實上逆命題（converse）亦成立。

驗算

- 極限情況：當 $\mu \to 0$ 時，界限 $b/(2d-b)$ 顯然得到滿足，而 P_1 在光滑桌面上當然會滑出桌邊。若 $b = d$，界限變成 1，所以在 $\mu < 1$ 之下它必定掉下；這是對的，因為 P_2 着地時 P_1 已在桌邊，而且仍在運動。
- 由於 $\mu < 1$，第二個條件需要 $e > \frac{1}{2}$。地面幾乎沒有彈性時，彈跳很短，所以 P_2 會先再次着地，與我們的預期一致。
- 數值上，取 $d = 2$、$b = 1$、$\mu = 0.5$ 和 $e = 0.8$（取 $g = 9.8$），逐步模擬運動得出 $t_1 \approx 0.452\,\text{s}$ 和 $t_2 \approx 0.361\,\text{s}$，與 $V/(\mu g)$ 和 $2eV/g$ 在 $V^2 = 4.9$ 時的值吻合。這裏 $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$，所以 P_2 先再次彈跳。在逐步模擬中對兩個判別條件所作的隨機測試，每一次結果都吻合。

常見錯誤

- 在第二階段仍保留張力：P_2 一着地，繩子便鬆弛，P_1 只受摩擦力減速。
- 忘記 P_1 已經移動了距離 b，把 s 與 d 比較，而不是與 $d-b$ 比較。
- 把系統的加速度寫成 $g(1-\mu)$，忘記了 $mg(1-\mu)$ 這個力要令兩個質量一起加速。

STEP 之外

這裏的繩子是一個單側約束（unilateral constraint）：它只能拉，不能推，所以繩子一鬆弛，運動方程便會轉換。支配方程在碰撞時或失去接觸時改變的系統，稱為分段光滑

（piecewise-smooth）系統或混合（hybrid）系統，在工程動力學和機械人學中都有深入的研究。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對繩子、摩擦和碰撞有仔細的論述，是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。