詳細解答

STEP II 1992，第 12 題

力學 • 力矩與彈性繩

STEP II 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q12

關鍵思路

每個輪子都可以自由轉動，所以它處於平衡（equilibrium）的唯一條件，就是對輪心的力矩（moment）互相抵銷：懸掛的質點（particle）要把輪子向一個方向轉，而彈性繩（elastic string）則把它向另一個方向拉回去。由幾何關係可以用 θ 表示彈性繩的伸長量（extension），於是由胡克定律（Hooke's law）得出張力（tension），再取力矩便得到一條關於 θ 的方程。因此，數算平衡位置的數目，就是數算這條方程在真正有意義的角度範圍內有多少個解。

解答

建立模型

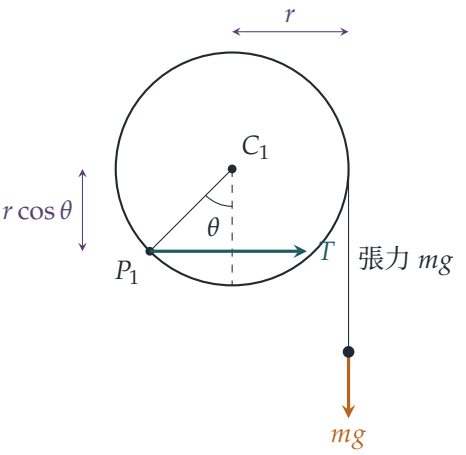
我們把各質點視為質點，把懸掛它們的繩視為輕（light）而不可伸長（inextensible）的繩，並把彈性繩視為輕而且服從胡克定律。輪軸是光滑（smooth）的，所以每個輪心處的反作用力對該輪心沒有力矩。

取 C_1C_2 為水平。在圖中，P_1 位於 C_1 外側（左方）$r\sin\theta$ 處，並在其下方 $r\cos\theta$ 處；P_2 則是它的鏡像。所以 P_1 和 P_2 處於同一高度，彈性繩是水平的，長度為

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

它的自然長度（natural length）是 d，所以伸長量是 $2r\sin\theta$，而根據胡克定律，張力為

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$



W_1 上的質點懸掛着並處於平衡，所以繫着它的繩的張力是 mg；這條繩在較接近 W_2 的一側沿切線方向離開輪子，與 C_1 的水平距離為 r。彈性繩以力 T 把 P_1 水平地拉向 W_2，而它的作用線在 C_1 下方 $r\cos\theta$ 處。

平衡條件

對 C_1 取力矩：重量使 W_1 順時針轉動（如圖所示），力矩為 mgr；張力則使它逆時針轉動，力矩為 $Tr\cos\theta$。所以

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\,r\cos\theta = \frac{\lambda r^2\sin 2\theta}{d},$$

其中用了 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$。兩邊除以 λr^2，得

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

這正是所要證明的結果。根據對稱性，對 C_2 取力矩也會得到同一條方程。

哪些角度是容許的？

想一想 為甚麼 θ 不可以是任意角度，使得 $\sin 2\theta = k$ 有無限多個解？

張力的力矩必須與重量的力矩方向相反。若 $\sin\theta \le 0$，則 P_1 與 P_2 兩點相距不超過 d，於是彈性繩鬆弛，$T = 0$，沒有東西可以抵銷 mgr。若 $\cos\theta \le 0$，則彈性繩與 C_1 同高或在其上方，所以它對 C_1 的力矩是零，或者與重量一樣使輪子向同一方向轉動。無論哪種情況都不會有平衡。因此，平衡必須滿足

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{即} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

（兩個輪子可否處於不同的角度？張力對每個輪心的力矩，等於 T 乘以該輪心到直線 P_1P_2 的垂直距離，而兩個力矩都必須等於 mgr。所以 C_1 和 C_2 與這條直線的距離相同，

並且在直線的同一側，而直線在兩個輪心的下方。因此這條直線平行於 C_1C_2，所以 P_1 和 P_2 處於同一深度，兩個角度亦相同，因為假如兩個角度異號，彈性繩的長度便剛好是 d，因而鬆弛。所以每一個平衡位置都屬於圖中所示的對稱類型。)

設 $k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$。在 $0 < 2\theta < \pi$ 上，$\sin 2\theta$ 由 0 上升，在 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 時達到 1，然後回落至 0，其間恰好兩次取得 $(0,1)$ 內的每一個值，並恰好一次取得 1 這個值。所以方程 $\sin 2\theta = k$

- 在 $k > 1$ 時無解；
- 在 $k = 1$ 時恰有一個解 $\theta = \frac{\pi}{4}$；
- 在 $0 < k < 1$ 時恰有兩個解 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$，其中 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$。

由於 $k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$，答案如下：

第 (i) 部分

當 $\lambda < \dfrac{mgd}{r}$ 時沒有平衡位置：彈性繩太弱，在任何角度都無法拉住質點。

第 (ii) 部分

當 $\lambda = \dfrac{mgd}{r}$ 時只有一個平衡位置，此時 $\theta = \frac{\pi}{4}$。

第 (iii) 部分

當 $\lambda > \dfrac{mgd}{r}$ 時恰有兩個平衡位置，分別在 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$。

第 (iv) 部分

沒有任何 λ 的值可以給出多於兩個平衡位置，因為 θ 被限制在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內。

驗算

- 量綱：λ 是力，mg 也是力，而 d/r 是兩個長度之比，所以 $mgd/(\lambda r)$ 是無量綱的，正弦值理應如此。
- 極限情況：當 $\lambda \to \infty$ 時，彈性繩變得不可伸長，兩個解分別趨向 $\theta \to 0$（伸長量極小，張力很大）和 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（彈性繩幾乎與輪心同高，所以力臂極小）。兩者都合理。
- 數值驗算：取 $m = 1$、$d = 4$、$r = 1$、$g = 9.8$ 和 $\lambda = 3mgd/r$，於是 $k = \frac{1}{3}$；一個包

含兩個輪子的完整模型（容許兩個角度不同）恰有兩個平衡位置，分別在 $\theta \approx 0.1699$ 和 $\theta \approx 1.4009$；它們就是 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 減去這個值。

常見錯誤

- 把伸長量當作 $r\sin\theta$ 而不是 $2r\sin\theta$：彈性繩的兩端都向外移動了。
- 以 $r\sin\theta$ 作為張力的力臂。張力是水平的，所以它的力臂是垂直距離 $r\cos\theta$。
- 在 (iv) 中答「無限多個」，忘記了只有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 在物理上才有可能。

STEP 之外

研究平衡位置的數目如何隨參數改變而變化，正是分岔理論（*bifurcation theory*）的起點。在這裏，$\lambda > mgd/r$ 時的兩個平衡位置在 $\lambda = mgd/r$ 時合而為一，然後消失，這稱為鞍結分岔（saddle-node bifurcation），又稱摺疊分岔（fold bifurcation）。考察勢能（potential energy）便會發現，這一對平衡位置中一個是穩定的，另一個是不穩定的，這正是摺疊分岔的典型特徵。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 講述了力矩、剛體平衡，以及如何由勢能判斷穩定性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。