詳細解答

STEP II 1992，第 11 題

力學 • 拋體運動

> **STEP II 1992，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

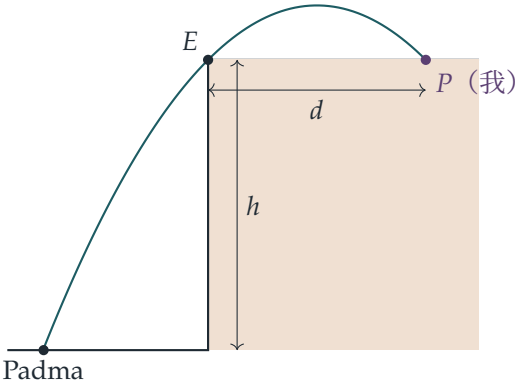
關鍵思路

這一擲的難處不在於把銀包拋到高度 h，而在於讓它越過崖頂：由崖邊到我所站之處，水平距離至少為 d，銀包在這一整段路程中的高度都不得低於 h。因此，我們只考慮銀包首次到達高度 h 那一刻之後的運動。由那一刻起，它就是一個在水平地面（即崖頂所在的水平面）上的普通拋體（projectile），其速率可由能量守恆（conservation of energy）求得，餘下的工作交給大家熟悉的最大射程（maximum range）u^2/g 便可。

解答

模型

把銀包視為一個只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力，並設它由地面拋出（Padma 的身高可忽略不計）。設 E 為懸崖的頂邊，P 為我所站的位置，因此 P 的高度為 h，並在 E 之後水平距離 d 處。崖面是鉛垂的，而沙灘在崖面的另一側，與我分處兩邊，所以無論 Padma 站在哪裏，銀包都必須越過 E（最差的情況是剛好擦過它），然後落到 P。



以下會反覆用到一個事實。若一個質點在某一水平面上的速率為 u，運動方向與水平線成仰角 α，則它經過時間 $2u\sin\alpha/g$ 後回到該水平面，其間的水平位移為

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} \le \frac{u^2}{g},$$

等號成立當且僅當 $\alpha = 45°$。

條件是必要的

假設某一擲能把銀包送到 P。銀包必定到達高度 h，設 Q 為軌跡上首個高度為 h 的點。取崖腳為勢能（potential energy）的零點，由能量守恆可得銀包在 Q 的速率 u：

$$u^2 = V^2 - 2gh.$$

想一想 為甚麼 Q 與 P 的水平距離必定至少為 d？

當銀包的水平位置與崖面相同時，它的高度必須至少為 h，否則便會撞上崖面（或在崖邊之下經過）。它的高度由 0 開始連續上升，所以在此之前它已經到達高度 h：Q 位於 E 靠沙灘的一側，或就在 E。由於 P 在 E 之後水平距離 d 處，Q 到 P 的水平距離至少為 d。

在 Q 與 P 之間，銀包以速率 u 出發，由高度 h 回到高度 h。根據上述關於射程的事實，它所走過的水平距離至多為 u^2/g。因此

$$d \le \frac{u^2}{g} = \frac{V^2 - 2gh}{g}, \qquad \text{即} \qquad V^2 \ge g(2h + d).$$

條件是充分的

現在假設 $V^2 \geq g(2h+d)$。則 $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$，所以 $gd/u^2 \leq 1$，於是可以選取一個角 α，滿足 $0 < \alpha \leq 45^\circ$ 及

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

考慮這樣一條拋物線（parabola）軌跡：它以速率 u 經過 E，以仰角 α 朝遠離沙灘的方向運動。根據關於射程的事實，它在 E 之後水平距離 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$ 處回落到高度 h，那正是 P。在 E 與 P 之間，它高於高度 h，所以能越過崖頂。

把這條軌跡由 E 起在時間上倒推回去：在較早的時刻，銀包的位置較低，而且在沙灘上方離崖面較遠（當時它的鉛垂速度較大，而且向上），所以軌跡會在沙灘上某一點與地面相交，該點與崖腳的水平距離為正數。在到達 E 之前，軌跡完全位於崖面靠沙灘的一側，所以途中沒有任何阻礙；又因為沙灘寬闊，Padma 可以站在該點。由能量守恆，銀包在該點的速率為 $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$。因此，若 Padma 在該點以速率 V 沿軌跡的方向拋出銀包，銀包便會沿着這條軌跡到達我手上。

（當 $V^2 = g(2h+d)$ 恰好成立時，$\alpha = 45^\circ$，銀包剛好擦過崖邊 E；若 V 更大，則在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 內有兩個角可行，而且兩者都令銀包嚴格地在崖邊上方經過。）

綜合以上兩部分，Padma 能把銀包拋給我，當且僅當 $V^2 \geq g(2h+d)$，這正是所要證明的。

驗算

- 若 $d = 0$，條件變成 $V^2 \geq 2gh$，這正是鉛垂上拋到達高度 h 所需的條件。
- 若 $h = 0$，條件變成 $V^2 \geq gd$，即水平地面上常見的最大射程。
- 若不理會崖邊，Padma 最有利的做法是站在崖腳，而所有軌跡的包絡拋物線（bounding parabola）只給出 $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$；由於 $\sqrt{h^2+d^2} \leq h + d$，這個條件較弱。所以崖邊確實是起決定作用的約束。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$h = 20$ 及 $d = 15$，臨界速率為 $\sqrt{539} \approx 23.2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$；Padma 站在離崖腳約 11.4 m 處，而對這一擲進行逐步模擬，銀包落在崖邊之後 15.0 m 處，並擦過 E。對隨機選取的 h、V 掃描所有拋射角，結果證實軌跡上兩個高度為 h 的點之間的最大水平間距為 $(V^2 - 2gh)/g$。

常見錯誤

- 只對由崖腳拋往點 P 的情況使用包絡拋物線。這樣做忽略了崖邊，所得的條件是必要但不充分的。

- 只證明一個方向。「若」的方向需要明確構造出一擲，並檢查它由沙灘出發，而且不會撞上懸崖。

STEP 之外

在高度 h 重新開始考慮運動這一招之所以可行，是因為運動方程（equations of motion）不隨時間改變，在水平平移下亦保持不變，所以軌跡上任何一點都可以當作一次全新的拋射。「哪些目標可以到達？」這類問題，討論的是一族曲線的包絡線（envelope）；若途中有障礙物，答案便取決於哪一個約束最先生效，這個想法在最優化（optimisation）和變分法（calculus of variations）中會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）是進一步學習拋體運動和能量方法的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。