詳細解答

STEP II 1992，第 10 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP II 1992，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q10

關鍵思路

把式子寫成 $\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$：它的輻角（argument）就是由方向 $z \to 0$ 逆時針轉到方向 $z \to 1$ 的角。因此，固定輻角就等於固定由 0 到 1 的線段在 z 處所對的角，接下來便可交給圓的定理（circle theorems）處理（同弓形內的圓周角相等、圓內接四邊形對角互補）。最後一部分用的是同一個想法，只是把由 0 到 1 的線段換成弦 z_4z_2。

解答

（題目的敘述有一處誤植：條件應為 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$。）

整個解答全靠兩個事實。第一，由於 $\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$，這個輻角量度的是在 z 處由直線 $z0$ 逆時針轉到直線 $z1$ 的角。第二，它告訴我們 z 位於實軸（real axis）的哪一側：

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

所以 $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$ 當且僅當 $\operatorname{Im} z > 0$，而它落在 $(-\pi, 0)$ 內當且僅當 $\operatorname{Im} z < 0$。實軸上的點給出的商是實數（輻角為 0 或 π），而 $z = 0, 1$ 則根本沒有輻角。

第 (i) 部分

這裏 $\operatorname{Im} z > 0$，而由 0 到 1 的線段在 z 處所對的角為 α。在實軸上方，使一條固定的弦（chord）對着固定角度的所有點，組成一條通過弦兩端的圓弧（同弓形內的圓周角相等）。反過來，該弧上每一點看這條弦的角都是 α，而且因為該點位於弦的上方，這個角是逆時針方向轉的，所以整條弧都屬於所求的軌跡（locus）。

要確定這個圓：圓心角為 2α，所以長度為 1 的弦給出半徑 $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$，而圓心位於 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上，高度為 $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$。軌跡就是圓

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

位於實軸上方的那段弧，但不包括端點 0 和 1。由於 $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$，這是優弧（major arc）。當 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 時，它就是以 0 到 1 為直徑的上半圓（半圓上的圓周角）。

第 (ii) 部分

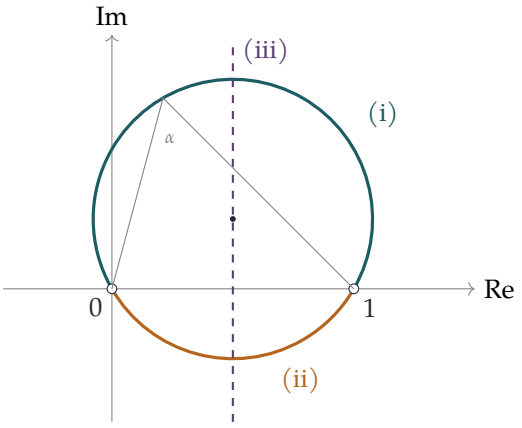
現在輻角 $\alpha - \pi$ 落在 $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ 內，所以 $\operatorname{Im} z < 0$，而弦在 z 處所對的角大小為 $\pi - \alpha$，方向為順時針。

> **想一想** 在實軸下方，弦所對的角為 $\pi - \alpha$ 的是哪一個圓？

就是 (i) 中的同一個圓。若 P 在 (i) 的弧上，而 Q 在該圓的另一段弧上，則 $0PQ1$（按適當的次序排列）是一個圓內接四邊形（cyclic quadrilateral），其中 P 與 Q 是對角，所以 P 和 Q 處的角之和為 π。因此，實軸下方的劣弧（minor arc）正正就是角為 $\pi - \alpha$ 的地方。軌跡是 (i) 中的圓位於實軸下方的那段弧，同樣不包括 0 和 1。(i) 和 (ii) 兩部分合起來，就是除去 0 和 1 之後的整個圓。（若 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$，(ii) 就是下半圓。）

第 (iii) 部分

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$ 即 $|z-1| = |z|$ 且 $z \neq 0$：z 與 0 和 1 等距。軌跡是垂直平分線（perpendicular bisector），即直線 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$。



草圖所示為 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 的情況：藍綠色的優弧是 (i)，琥珀色的劣弧是 (ii)，紫紅色的虛線是 (iii)，空心圓圈標示被剔除的點 0 和 1。

最後一部分

設 $f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$。由於 $(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$，

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

所以 $\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3)$（模 2π）。

函數 f 其實就是 (i) 和 (ii) 兩部分的那個函數，只是換了坐標。設 $z = z_4 + (z_2 - z_4)u$，這是先旋轉（rotation）和放大（enlargement），再平移（translation），把 $u = 0, 1$ 分別送到 z_4, z_2。於是

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

通過這四點的圓，對應於 u 平面上一個通過 0 和 1 的圓。

想一想 為甚麼 z_1 和 z_3 位於不同的弧上？

這些點沿圓周依次為 z_1, z_2, z_3, z_4，所以弦 z_2z_4 把圓分成兩段弧，一段包含 z_1，另一段包含 z_3。在 u 平面上，其中一段位於實軸上方，另一段位於實軸下方。

由 (i) 和 (ii) 可知，$\frac{u-1}{u}$ 的輻角在上方的弧上取常數值 $\beta \in (0, \pi)$，在下方的弧上取值 $\beta - \pi$。這裏我們並沒有假設 $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$：上面運用圓的定理的論證從未用過這個限制。因此

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

所以 w 是實數，而且其實是負數。 ■

驗算

對於正方形 $z_1 = 1$、$z_2 = \mathrm{i}$、$z_3 = -1$、$z_4 = -\mathrm{i}$，我們得到 $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$，確實是負實數。至於 (i)，取 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 和 $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$。則 $\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$，其輻角為 $\frac{1}{2}\pi$。我們亦以數值方法驗證過：對若干個 α 的值，兩段弧上的輻角確如上文所述；並且在隨機的圓上依次隨機取四點，共 10^4 組，w 都是負實數。

常見錯誤

- 把整個圓當作 (i) 的答案。只有一段弧的輻角是對的；另一段弧給出的是 $\alpha - \pi$，那正是第 (ii) 部分。
- 忘記剔除 0 和 1，在這兩點輻角沒有定義。

► 因為處理 $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ 中的負號時出錯，而弄錯 $\arg w$ 的正負號。像上面那樣把它們配對，就可避免這個問題。

STEP 之外

w 這個量（除了正負號和次序上的差別外）就是四個點的交比（cross-ratio）。它在每一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ 之下都保持不變，而四點共圓或共線，當且僅當它們的交比是實數。由於莫比烏斯映射把圓和直線送到圓和直線，這就提供了一個證明四點共圓（concyclicity）的巧妙方法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點發揮得淋漓盡致。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。