詳細解答

STEP II 1992，第 1 題

純數學 • 數列的極限

> **STEP II 1992，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

關鍵思路

每個極限（limit）都只需要一個標準手法，功夫在於選對手法。遇到有理函數（rational function），把分子和分母同除以 n 的最高次冪。遇到有界（bounded）的量除以不斷增大的量，就用夾逼（squeeze）。遇到喬裝了的已知極限，就作代換（substitution），讓偽裝自行脫落。至於兩個平方根之差，則乘以共軛式（conjugate）：這樣可以把兩個幾乎相等的量之差，化成一個一目了然的商。

解答

第 (i) 部分

把分子和分母同除以 n，

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

因為 $\frac{1}{n} \to 0$。極限是 1。

第 (ii) 部分

最高次冪是 n^2，它只在分母出現。把分子和分母同除以 n^2，

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

極限是 0：分母的增長速度與 n^2 相若，而分子只與 n 相若。

第 (iii) 部分

對於大的整數 n，我們對 $\sin n$ 所知的有用資料只有一項，就是它有界：$|\sin n| \le 1$。這已經足夠，因為

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

所以 $\dfrac{\sin n}{n}$ 被夾在 $-\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 之間，而兩者都趨向 0，故極限是 0。

第 (iv) 部分

> **想一想** 這不是和 (iii) 一樣嗎？

不一樣：這裏的角 $1/n$ 是縮小至 0，而不是不斷增大。設 $x = 1/n$。當 $n \to \infty$ 時，我們有 $x \to 0^+$，而所求的式子就是 $\dfrac{\sin x}{x}$，它在 $x \to 0$ 時的極限是以下標準結果

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

（其中一個理解方法：這正是 sin 在 0 的導數（derivative），即 $\cos 0 = 1$。又或者利用 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$，於是 $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$。）極限是 1。

第 (v) 部分

當 $n \to \infty$ 時，$\arctan n \to \frac{\pi}{2}$，因為當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（由下方趨近）時 $\tan\theta \to +\infty$，而且 arctan 是連續（continuous）且遞增的。極限 $\frac{\pi}{2}$ 不是零，所以我們可以取倒數（reciprocal）：

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

留意 $(\arctan n)^{-1}$ 的意思是 $1/\arctan n$，而不是 arctan 的反函數（inverse function）（那樣只會得出 tan）。

第 (vi) 部分

分子和分母都趨向 0，所以不能直接分別取極限。把兩者各自乘以其共軛式：

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

因此

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)},$$

這裏把分子和分母同除以 $\sqrt{n}$。當 $n \to \infty$ 時，兩個平方根都趨向 1（因為 $\sqrt{\ }$ 是連續的），所以極限是

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

想一想 為甚麼答案應該是 $\frac{1}{2}$，而不是例如 1？

在一個大的 n 附近，$\sqrt{x}$ 的圖像幾乎是一條斜率（gradient）為 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 的直線。所以 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$（步長為 1），而 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$（步長為 2）：兩者之比約為 $\frac{1}{2}$，正是步長之比。

驗算

代入一個大的 n。取 $n = 10^6$：(i) 得 0.999999；(ii) 得 5×10^{-6}；(iii) 約得 -3.5×10^{-7}；(iv) 準確至七個小數位得 1.0000000；(v) 得 0.636620，對照 $2/\pi \approx 0.636620$；而 (vi) 以有理化（rationalised）後的形式計算，得 0.50000012。在 (vi) 中，也應取小的 n 核對有理化後的形式與原式是否一致：當 $n = 1$ 時，兩者都等於 $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$。

常見錯誤

- 把 (iii) 和 (iv) 當作同一回事：在 (iii) 中，正弦值保持有界而分母不斷增大；在 (iv) 中，分子和分母都縮小至 0，而兩者之比趨向 1。
- 把 (v) 中的 $(\arctan n)^{-1}$ 理解為反函數。
- 在 (vi) 中取極大的 n，直接按原式用計算機計算：兩個幾乎相等的數相減會損失精確度。應先有理化。

STEP 之外

在大學裏，「$a_n \to L$」有精確的定義：對每一個 $\varepsilon > 0$，都存在一個 N，使得對所有 $n > N$ 均有 $|a_n - L| < \varepsilon$。上面用過的每一個手法，例如 (iii) 中的夾逼、(v) 中對非零極限取倒數，以及 (vi) 中把極限移入連續函數之內，在第一個分析（analysis）課程中都會成為由這個定義出發證明的定理。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）把這些概念闡述得既嚴謹又易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。