詳細解答

STEP I 1992，第 9 題

純數學 • 微分方程

> **STEP I 1992，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

關鍵思路

一切都源自一條方程：水的體積的變化率等於（流入率）減（流出率）。利用相似三角形（similar triangles），體積是水深 x 的一個簡單函數，於是鏈式法則（chain rule）便把這條方程化為關於 x 的微分方程（differential equation）。在第一部分，這條方程可以乾淨利落地分離變數（separate variables）；在第二部分，我們不去求解，而是從 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正負號，以及它等於零時的水深，直接讀出水位的變化情況。

解答

圓錐排空

當水深為 x cm 時，水佔據一個較小的圓錐，它與整個濾器相似，高為 x，半徑為 r。由相似三角形得 $r/x = a/H$，所以 $r = ax/H$，而水的體積為

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

由鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

水只出不入，流出率為 Ax，所以 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$。因此

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

這裏我們除以了 x，只要圓錐內仍然有水（$x > 0$），這樣做是容許的。左邊就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$，所以 $\frac{1}{2}x^2$ 以恆定的速率 $AH^2/(\pi a^2)$ 減少。它由 $\frac{1}{2}h^2$ 開始，到達 0 時圓錐便排空，所以

所需時間為

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 秒},$$

正如題目所求。（等價的做法是分離變數：$\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$。）

同時注水

現在 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$，所以

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

由於 $x > 0$，因子 $H^2/(\pi a^2 x^2)$ 是正數，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正負號與 $B - Ax$ 相同。記 $c = B/A$。那麼

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ 當} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ 當} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ 當} x > c.$$

所以 $x = c$ 是一個平衡（equilibrium）水深，此時流入量與流出量剛好相抵，而水位總是朝着 c 移動。這個水深只有在 $c \le H$ 時才可能實際出現在濾器之內，所以各種情況取決於 c 與 h 及 H 的大小比較。

想一想 如果水位正朝着 c 移動，它最終會否真的到達該處，甚至越過它？

它不可能越過：要越過 c，就必須先等於 c，而在該處 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$。事實上，它在有限時間內永遠到不了 c。把 t 看成 x 的函數，水位由 h 變到介乎 h 與 c 之間的某個水深 X 所需的時間為

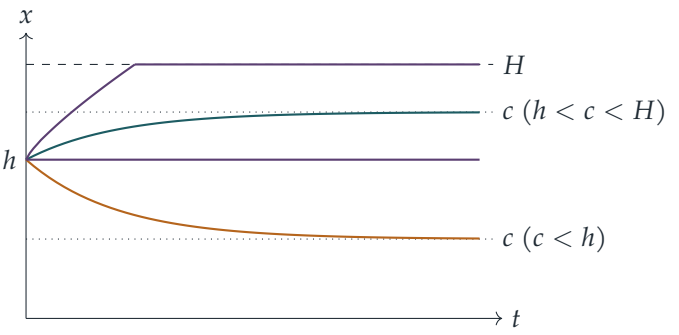
$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

在 $x = c$ 附近，被積函數（integrand）的表現有如 $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$，其積分是 $-\ln(c-x)$ 的倍數；當 $X \to c$ 時，它趨向無窮大。所以水位愈來愈慢地逼近 c，要「經過無限長的時間」才到達。無論從哪一邊逼近，同樣的論證都適用。

因此各種情況如下：

- $B < Ah$（即 $c < h$）。起初 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$：水位下降，愈降愈慢，並從上方趨向 $c = B/A$ 而不會到達。特別要注意，與第一部分不同，圓錐永遠不會排空（因為 $c > 0$）。
- $B = Ah$（即 $c = h$）。這時 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ 從一開始就成立：水流入的速率與排出的速率相同，水位保持在 h。
- $Ah < B < AH$（即 $h < c < H$）。水位上升，愈升愈慢，並從下方趨向 B/A。水位始終低於 H，所以濾器永遠不會滿溢。
- $B = AH$（即 $c = H$）。水位朝着邊緣上升並趨向 H，但根據上面的論證，它永遠不會真正到達，所以（在這個模型中）濾器永遠不會滿溢。

- $B > AH$（即 $c > H$）。現在對所有 $x \le H$ 都有 $B - Ax \ge B - AH > 0$，而且 $x^2 \le H^2$，所以
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$
上升速率有一個正的常數作為下界，所以水位在有限時間內到達邊緣，最多需時 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$ 秒。此後濾器滿溢：水位保持在 H，而多出的 $B - AH$ $\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$ 從頂部溢出。



草圖顯示了幾種典型情況：下降至 c（琥珀色）、停留在 h 或在有限時間後滿溢（紫紅色），以及上升至 c（藍綠色）。

驗算

- 代入 $B = 0$ 得 $c = 0$：水位朝着 0 下降，與第一部分吻合（在那裏水位*確實*到達 0，因為流出率 Ax 與 x 成正比，而體積則隨 x^3 變化，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$ 並不趨向 0）。
- 以數值驗證：取 $a = 3$、$H = 8$、$A = 0.7$、$h = 5$，公式給出 $T \approx 7.889\,\mathrm{s}$，而按時間逐步推算 x^2 亦得到相同結果。對第二條方程作數值積分，可以確認每一種情況；例如當 $B/A = 9 > H$ 時，水位約在 41.5 s 後到達 H，而當 $B/A = 7$ 時，水位與 7 相差不超過 ε 所需的時間，在 ε 每除以 10 時便增加約 71 s，正是上文所預測的對數式增長。

常見錯誤

- 使用圓柱體積 $\pi a^2 x$，而不是高為 x 的相似圓錐的體積。
- 聲稱水位在有限時間內到達 B/A，或聲稱水位會越過它然後來回振盪。
- 忘記了邊緣：平衡水深 B/A 只有在 $B/A \le H$ 時才會達到；否則濾器會滿溢。

STEP 之外

第二部分讓你初嘗微分方程的定性（qualitative）理論：對於 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$，你可以找出平衡點（$f$ 的零點），根據 f 在兩側的正負號判斷它們的穩定性（stability），再利用解的唯一性（uniqueness）證明解只會逼近平衡點而永遠不會越過，整個過程完全不用求解任何方程。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）正是以這種精神處理自治方程（autonomous equations）與穩定性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。