詳細解答

STEP I 1992，第 8 題

純數學 • 微積分基本定理

STEP I 1992，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q8

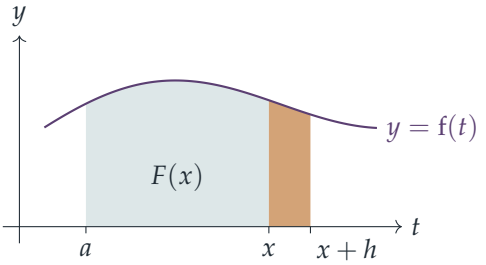
關鍵思路

上限為變量的積分，是一塊隨上限移動而增長的面積，而它的增長率正好等於曲線在該上限處的高度。單憑這一個事實（微積分基本定理，Fundamental Theorem of Calculus），就可以把題目中每一條積分方程化為微分方程（differential equation）。求導會失去有關常數的資料，所以我們每次都要把一個方便的 x 值（通常是 $x = 0$）代入原來的方程，把它找回來。

解答

積分的導數

設 $F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，即 $y = \mathrm{f}(t)$ 之下由 $t = a$ 至 $t = x$ 的面積。把 x 增加一個微小的量 h，就會多出一條闊度為 h 的窄條：



這條窄條的面積是 $F(x+h) - F(x)$。若 f 是連續（continuous）的，則在 $[x, x+h]$ 上，曲線與 $\mathrm{f}(x)$ 的差距不會超過一個微小的量 $\varepsilon(h)$，而當 $h \to 0$ 時 $\varepsilon(h) \to 0$。因此窄條夾

在高度為 $\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$ 的兩個長方形之間：

$$(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h))h \le F(x+h) - F(x) \le (\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h))h.$$

除以 $h > 0$（$h < 0$ 的情況相同，只是窄條在左邊），再令 $h \to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

留意結果中並沒有 a：改變下限只會令 F 加上一個常數。

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

根據上面的結果，右邊是可導（differentiable）的，所以 f 也可導，而兩邊求導可得

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

把 $x = 0$ 代入原來的方程，積分的區間長度為零，所以 $\mathrm{f}(0) = 1$。

想一想 我們怎樣知道 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ 除了 e^x 的倍數之外，再沒有其他解？

考慮 $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$。由積法則（product rule），

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)) = 0,$$

所以 g 是常數，而 $g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$，即 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$，正如題目所求。（反過來，$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$，所以它確實是一個解。）

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

與之前完全一樣，$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$，所以 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ 是常數。但這次代入 $x = 0$ 得 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以該常數是 0，而唯一的解是

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{對所有} x.$$

上一條方程中的「+1」正是決定指數函數大小的關鍵；沒有了它，就只剩下零函數。

最後部分

把兩邊對 x 求導。在右邊，x 現在是下限，而

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

因此

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

由於 $1+x^2>0$，我們可以把兩邊除以它，得

$$\mathrm{f}(x)=1-x^2.$$

要求 C，把 $x=0$ 代入題目給出的方程。左邊以及 $x-\frac{x^5}{5}$ 各項都變為零，餘下

$$0=\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t+C=\left[\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^5}{5}\right]_0^1+C=\tfrac{2}{15}+C,$$

所以 $C=-\frac{2}{15}$，正如題目所求。

想一想 求導只告訴我們兩邊的導數相同。$\mathrm{f}(x)=1-x^2$ 和 $C=-\frac{2}{15}$ 是否真的對每一個 x 都滿足方程？

是的。取這個 f 時，兩邊的導數對所有 x 都相等，所以兩邊只相差一個常數；而我們選取 C，正是要令兩邊在 $x=0$ 時相等。因此兩邊處處相等。反過來，任何解都必須滿足求導後的方程，所以 $1-x^2$ 是唯一可能的 f。

驗算

- 當 $x=1$：左邊是 $\int_0^1(1-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$，右邊是 $0+1-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$。兩者吻合。
- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t\approx 0.133333=\frac{2}{15}$，而最後一條方程的兩邊在 $x=-1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$ 處的相差都在 10^{-10} 之內。

常見錯誤

- 當變量是下限時忘記負號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t=-g(x)$。
- 解出 $\mathrm{f}'=\mathrm{f}$ 後停在 $A\mathrm{e}^x$：要靠原來的積分方程在 $x=0$ 時的情況，才能確定 A。
- 寫出 $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 這類式子，把啞變量（dummy variable）t 與上限 x 混為一談。

STEP 之外

未知函數出現在積分之內的方程，稱為*積分方程*（integral equations）；本題這類帶有可變積分限的方程是沃爾泰拉方程（Volterra equations），它們等價於微分方程的初值問題（initial-value problem）。在大學的第一個分析課程中，你會從黎曼積分（Riemann integral）的定義出發，嚴謹地證明微積分基本定理，而上面的窄條論證就會變成一個 ε–δ 證明。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把這部分寫得十分易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。