詳細解答

STEP I 1992，第 7 題

純數學 • 整值多項式

> **STEP I 1992，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

關鍵思路

不要試圖證明各係數（coefficient）都是整數（integer），因為對二次函數（quadratic function）而言，它們不一定是整數：$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ 在每個整數處都取整數值。正確的做法是用已知的整數值表示各係數，再代回原式，使 $\mathrm{f}(n)$ 寫成 $\mathrm{f}(-1)$、$\mathrm{f}(0)$ 和 $\mathrm{f}(1)$ 的組合，而各項的乘數都是整數。至於最後一部分，只要把原點平移，便是把中間部分再做一次。

解答

線性函數

由於 $\mathrm{g}(0)=b$ 及 $\mathrm{g}(1)=a+b$，我們有 $b=\mathrm{g}(0)$ 及 $a=\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)$，兩者都是整數。因此對任意整數 n，

$$\mathrm{g}(n)=an+b=\mathrm{g}(0)+n(\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)),$$

這是若干個整數乘積之和，所以是整數。

二次函數

設 $p=\mathrm{f}(-1)$，$q=\mathrm{f}(0)$，$r=\mathrm{f}(1)$，三者都是整數。於是

$$p=A-B+C,\qquad q=C,\qquad r=A+B+C,$$

解之，得

$$C=q,\qquad B=\frac{r-p}{2},\qquad A=\frac{p+r-2q}{2}.$$

所以 A 和 B 不一定是整數；它們可以是奇數的一半。把這些結果代入 $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$，並按 p、q 和 r 整理各項：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

? **想一想** p 和 r 的乘數，分母都有一個 2。為甚麼它們是整數？

對於整數 n，$n-1$ 和 n 是兩個連續整數，其中必有一個是偶數，所以 $n(n-1)$ 是偶數。同理，$n(n+1)$ 也是偶數。因此 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 都是整數，而 $1-n^2$ 也是整數。故此 $\mathrm{f}(n)$ 是若干個整數乘積之和，所以對每個整數 n 它都是整數，這正是所要證明的。

（這三個乘數都是二次式，各自在 $-1, 0, 1$ 的其中一點取值 1，而在另外兩點取值 0。這就是拉格朗日（Lagrange）插值法（Lagrange interpolation）。）

最後一部分

設 α 為實數，並定義 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$。展開後得

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

所以 h 同樣是形如 $A'x^2 + B'x + C'$ 的函數，而且係數都是實數。中間部分的論證除了用到 A、B、C 是實數之外，並沒有用到它們的其他性質。現在

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

按假設都是整數。因此，把中間部分的結果應用於 h，可知對每個整數 n，$\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$ 都是整數。具體寫出來就是

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

驗算

- 把 $n = -1, 0, 1$ 代入 $\mathrm{f}(n)$ 的公式：各乘數分別變成 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$，正好還原出 p、q、r。
- 以 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ 為例，有 $p = 0$，$q = 0$，$r = 1$，而公式給出 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$，即三角形數（triangular numbers）。
- 數值驗算：取 $\alpha = \sqrt{2}$ 及 $\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$，$\mathrm{f}(\alpha) = -7$，$\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$，則通過這三點的二次函數給出 $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$，與 $10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$ 吻合。

常見錯誤

- 聲稱 A、B、C 必定是整數。它們不一定是整數，任何依賴這一點的論證都是錯的。
- 在最後一部分，試圖證明 α 必定是整數或有理數。它可以是任何實數；重要的只是平移。

STEP 之外

在每個整數處都取整數值的多項式（polynomial），恰好就是二項式係數（binomial coefficients）$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ 的整數組合。對二次多項式而言，這些就是 1、x 和 $\frac{1}{2}x(x-1)$，而這個結果可用有限差分（finite differences）證明：一個 d 次多項式，只要在 $d+1$ 個連續整數處取整數值，它就是整值（integer-valued）多項式。同樣的想法也是數值分析（numerical analysis）中牛頓（Newton）前向差分公式（forward-difference formula）的基礎。關於整值函數與整除性（divisibility）的更多內容，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門經典）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。