詳細解答

STEP I 1992，第 6 題

純數學 • 小角近似

> **STEP I 1992，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q6

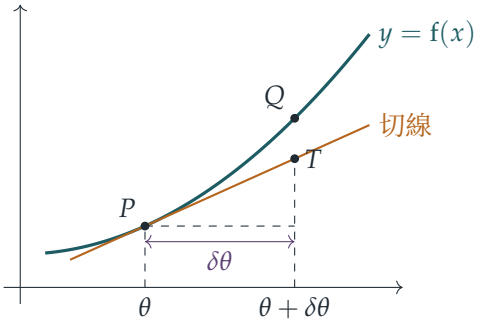
關鍵思路

遠處那一點 C 的角恰好是 ϕ，因為 $\theta + \phi$ 是三角形 ABC 的外角（exterior angle）。於是由正弦定理（sine rule）可求得 AC 的準確值。由於 C 非常遙遠，ϕ 必定極小，而小角近似（small-angle approximation，其實就是第一部分的線性近似換了個面貌）可把準確公式化成簡單的式子。至於誤差的問題，不過是把同一個線性近似再用一次，這次以 ϕ 為變數。

解答

線性近似

在點 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ 附近，f 的圖像非常貼近它的切線（tangent），而切線的斜率（gradient）是 $\mathrm{f}'(\theta)$。



向右移動一段距離 $\delta\theta$。沿着切線走，高度上升了（斜率）×（水平距離）$= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$，到

達 T。沿着曲線走，則上升至 Q，高度為 $\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)$。當 $\delta\theta\to 0$ 時，間距 QT 縮小得比 $\delta\theta$ 本身還要快，因為

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta}\to \mathrm{f}'(\theta)$$

正正就是導數（derivative）的定義。所以當 $\delta\theta$ 很小時，

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)\approx \mathrm{f}(\theta)+\mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

C 的距離

在三角形 ABC 中，A 處的角是 θ，而 B 處的外角是 $\theta+\phi$。外角等於兩個內對角之和，所以

$$\angle ACB=\phi.$$

B 處的內角是 $\pi-(\theta+\phi)$，而 $\sin(\pi-x)=\sin x$，所以由正弦定理得出以下準確結果：

$$AC=\frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi},\qquad h=AC\sin\theta=\frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

想一想 「h 遠大於 a」這個條件究竟在哪裏用上？

它告訴我們 ϕ 很小。把準確公式重新整理，得 $\sin\phi=a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h\le a/h$，所以 $h\gg a$ 迫使 $\sin\phi$ 極小，因而 ϕ 也極小。（從非常遙遠的 C 望過來，基線（baseline）AB 所張的角幾乎是零。）現在取 $\mathrm{f}=\sin$，應用第一部分的結果：

$$\sin(\theta+\phi)\approx\sin\theta+\phi\cos\theta\approx\sin\theta,\qquad \sin\phi\approx\sin 0+\phi\cos 0=\phi.$$

因此

$$h\approx\frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

這正是所求的結果，並且

$$AC=\frac{h}{\sin\theta}\approx\frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

（若保留 $\phi\cos\theta$ 一項，會得到 $AC\approx a\sin\theta/\phi+a\cos\theta$。多出來的部分只有 a 的大小，與量級為 h 的距離相比可以忽略不計。）

ϕ 的誤差所造成的影響

把 AC 看成函數 $g(\phi)=a\sin\theta\,\phi^{-1}$，其中 θ 固定不變，因為它的量度是準確的。根據第一部分，誤差 $\delta\phi$ 會令估計值改變

$$\delta(AC)\approx g'(\phi)\,\delta\phi=-\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

所以 AC 的誤差大小約為 $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$；高估 ϕ 就會低估距離。

想一想 如果把 a 加倍，公式的分子有 a，誤差豈不是也加倍？

不會，因為 ϕ 並非固定：它取決於基線的長度。點 C（因而 h）保持不變，而由 $h \approx a\sin^2\theta/\phi$ 可得 $\phi \approx a\sin^2\theta/h$，所以把 a 加倍，ϕ 也大約加倍。（由於 C 非常遙遠，θ 只有極輕微的改變。）以固定的量 h 來表示誤差：

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

對於相同的儀器誤差 $\delta\phi$，AC 的誤差與 a 成反比。**把兩台望遠鏡之間的距離加倍，誤差大約減半**。

驗算

- 取 $a = 1$、$\theta = \pi/6$、$\phi = 10^{-4}$。準確公式給出 $h \approx 2500.43$ 和 $AC \approx 5000.87$；近似公式則給出 2500 和 5000。AC 的差別約為 $0.87 \approx a\cos\theta$，與額外一項所預測的完全吻合。
- 直接把 C 當作兩條視線的交點來計算，對數以千計隨機選取的 a、θ 和細小的 ϕ，結果與兩個近似式的差距都在 0.1% 以內，而細小的 $\delta\phi$ 所引致的 AC 變化亦與 $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$ 相符。
- 對於固定的遠處一點 C，分別以基線 a 和 $2a$ 重新計算 ϕ，再對兩者加上相同的擾動 $\delta\phi$，所得的誤差比為 2。
- 量綱（dimensions）：$a\sin^2\theta/\phi$ 是長度，因為以弧度（radian）表示的角是無量綱的。

常見錯誤

- ϕ 以度為單位時使用 $\sin\phi \approx \phi$。這個近似式與 sin 的 f′ 一樣，必須使用弧度。
- 把 ϕ 當作固定，從而斷定誤差隨 a 加倍。目標固定的是 h，而不是 ϕ。
- 沒有察覺 $\angle ACB = \phi$，轉而建立坐標來計算。這樣做也行得通，但較為費時。

STEP 之外

這就是利用視差（parallax）進行的三角測量（triangulation），天文學家正是用這個方法，以地球軌道為基線，量度鄰近恆星的距離。這裏的誤差分析讓我們初嘗誤差傳遞（error propagation）的滋味：在一階近似下，量度值的誤差 δx 會在任何由它計算出來的量中變成誤差 $g'(x)\,\delta x$。這個想法經帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem）嚴格化之後，是

大學一年級分析學（analysis）的核心內容；參閱 Abbott, *Understanding Analysis*（分析學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。