詳細解答

STEP I 1992，第 4 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP I 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

關鍵思路

把每個條件改寫成關於 x 和 y 的敘述（其中 $z = x + \mathrm{i}y$），或者關於 z 的模（modulus）和輻角（argument）的敘述，所求的區域通常便一目了然。第 (i) 及 (ii) 部分只需要做到這一步。第 (iii) 部分則不同：它描述的是一個由和組成的集合，所以我們要證明兩件事。每一個和都落在我們所聲稱的區域之內，而該區域的每一點也確實是這樣的一個和。

解答

以下一律設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。

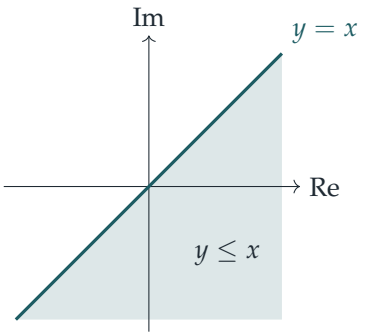
第 (i) 部分

展開得

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

所以 $\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})z) = x - y$。條件就是 $x - y \geq 0$，即 $y \leq x$。這個集合是直線 $y = x$ 上及其下方的閉半平面（closed half-plane），包括直線本身。

從幾何角度看，乘以 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相當於旋轉 $\frac{\pi}{4}$ 並放大 $\sqrt{2}$ 倍。因此條件是說，把 z 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{4}$ 之後，它會落在右半平面 $\mathrm{Re} \geq 0$ 之內。這表示 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$（或 $z = 0$），正是同一個半平面。



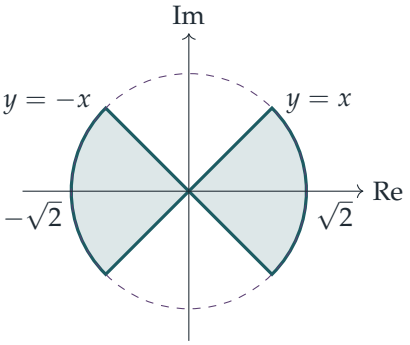
第 (ii) 部分

由於 $|z^2| = |z|^2$，第一個條件就是 $|z|^2 \leq 2$，即 $|z| \leq \sqrt{2}$：這是以原點為圓心、半徑為 $\sqrt{2}$ 的閉圓盤（closed disc）。

至於第二個條件，$z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$，所以 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$，條件就是 $x^2 \geq y^2$，即 $|y| \leq |x|$。這是直線 $y = x$ 與 $y = -x$ 之間、包含實軸的一對相對的閉扇形（sector）區域。

用極式（polar form）來做會更快：若 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，則 $z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，所以我們需要 $r \leq \sqrt{2}$ 及 $\cos 2\theta \geq 0$，由此得 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$（或 $z = 0$）。

所求集合是兩者的交集（intersection）：兩個閉的四分之一圓盤（各為圓心角 $\frac{\pi}{2}$、半徑 $\sqrt{2}$ 的扇形），一個向右張開，一個向左張開，在原點相接。整條邊界都包括在內。



第 (iii) 部分

設 S 為所有這些和組成的集合。我們聲稱 S 就是閉圓環（annulus）$\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$。

每一個和都落在圓環之內。若 $|z_1| = 2$ 及 $|z_2| = 1$，由三角不等式（triangle inequality）得

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| = 1.$$

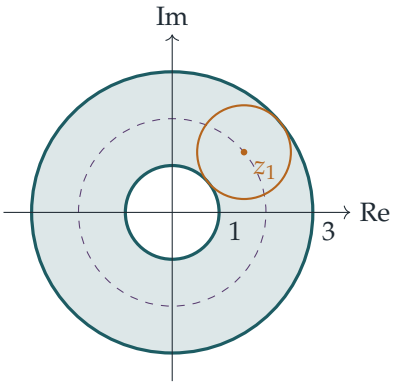
想一想 這樣就足夠了嗎？我們怎樣知道整個圓環都被填滿，而不只是圓環內的某條曲線？

這兩個不等式只說明 S 位於圓環之內，所以我們還要證明反方向的包含關係。任取一個滿足 $1 \leq |z| \leq 3$ 的 z。我們想找一個模為一的複數 z_2，使得 $|z - z_2| = 2$，因為這樣 $z_1 = z - z_2$ 的模便是 2，而且 $z = z_1 + z_2$。

從幾何角度看，z_2 必須同時位於以 0 為圓心的單位圓上，以及以 z 為圓心、半徑為 2 的圓上。兩個半徑分別為 1 和 2 的圓，若圓心相距 $d = |z|$，則它們相交當且僅當 $2 - 1 \leq d \leq 2 + 1$，而這正是我們的條件 $1 \leq |z| \leq 3$。

如果不想直接引用這個關於圓的事實，可以這樣看：設 $z = re^{i\alpha}$，並考慮 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$，它是 φ 的連續(continuous)函數。當 $\varphi = \alpha$ 時，點 $e^{i\varphi}$ 與 z 方向相同，所以 $f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \leq 2$。當 $\varphi = \alpha + \pi$ 時，它指向相反方向，所以 $f(\alpha + \pi) = r + 1 \geq 2$。根據中間值定理（intermediate value theorem），存在某個 φ 使得 $f(\varphi) = 2$，於是取 $z_2 = e^{i\varphi}$ 即可。

因此 S 恰好是圓 $|z| = 1$ 與圓 $|z| = 3$ 之間的閉圓環，兩個邊界圓都包括在內。有一個很好的想像方法：把 z_1 固定在半徑為 2 的圓上，$z_1 + z_2$ 便描出一個以 z_1 為圓心的單位圓。當 z_1 繞圓一周時，這些小圓便掃出整個圓環。



琥珀色的圓顯示了當 z_1 固定在虛線圓 $|z_1| = 2$ 上某一點時所得的各個和。

驗算

- 在 (i) 中，$z = 1$ 給出 $\mathrm{Re}(1 + \mathrm{i}) = 1 \geq 0$，而 $z = \mathrm{i}$ 給出 $\mathrm{Re}(-1 + \mathrm{i}) = -1 < 0$。這與 $y \leq x$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$z = 1$ 屬於該集合而 $z = \mathrm{i}$ 不屬於（$\mathrm{i}^2 = -1$），所以兩個扇形應該包含實軸，與圖中所畫一致。

- 在 (iii) 中，$z_1 = 2$、$z_2 = -1$ 給出 1，而 $z_1 = 2$、$z_2 = 1$ 給出 3，所以兩個邊界圓都可以達到。我們用 200 000 個隨機點測試了全部三個描述。隨機所得的和，其模介乎 1.0000 與 3.0000 之間；而對於圓環內的 1000 個隨機點，都能找到合適的 z_2，誤差在 2×10^{-4} 以內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，只保留扇形 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ 而忘記了左邊的那一個。z 與 $-z$ 的平方是相同的。
- 在 (iii) 中，用完三角不等式便停下來。這只說明 S 位於圓環之內，並未說明 S 就是整個圓環。
- 沒有交代邊界是否包括在內。這裏每一個不等式都是非嚴格的，所以每一條邊界都包括在內。

STEP 之外

第 (iii) 部分是兩個集合的閔可夫斯基和（*Minkowski sum*） $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ 的一個小例子，這個概念貫穿幾何學和凸分析（convex analysis）。雙向包含的論證（先證 $S \subseteq T$，再證 $T \subseteq S$）是證明兩個集合相等的標準方法，你在大學裏會經常用到。若想從幾何角度理解複數乘法就是旋轉加縮放（這會令 (i) 和 (ii) 幾乎一望而知），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析的著作）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。