詳細解答

STEP I 1992，第 3 題

純數學 • 奇函數與偶函數

> **STEP I 1992，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q3

關鍵思路

這裏每個積分都是在對稱區間 $[-\pi, \pi]$ 上計算的，所以對每個被積函數（integrand），首先要問的是：它是偶函數（even function）還是奇函數（odd function）？奇函數在對稱區間上的積分為零，而偶函數的積分則等於在 $[0, \pi]$ 上積分的兩倍，而在這個區間上絕對值（modulus）符號可以去掉。看出對稱性之後，四個部分各自最多只需一步簡短的計算。

解答

我們會用到兩個標準結果。若 $f(-x) = f(x)$（偶函數），則

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而若 $f(-x) = -f(x)$（奇函數），則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。兩者都可以用代換（substitution）$x = -u$ 處理 $[-a, 0]$ 上的積分而得出，該積分會變成 $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$。

我們還需要 $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$。

第 (i) 部分

由於 $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$，被積函數是偶函數。在 $[0, \pi]$ 上有 $\sin x \geq 0$，所以在該處 $|\sin x| = \sin x$。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

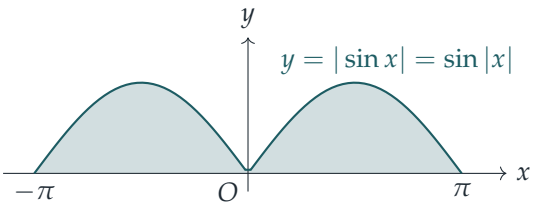
第 (ii) 部分

由於 $|-x| = |x|$，函數 $\sin|x|$ 是偶函數。在 $[0, \pi]$ 上，$|x| = x$，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

想一想 (i) 和 (ii) 的答案相同，是巧合嗎？

不是：在這個區間上，兩個被積函數其實是同一個函數。當 $0 \le x \le \pi$ 時，兩者都等於 $\sin x$。當 $-\pi \le x \le 0$ 時，我們有 $\sin x \le 0$，所以 $|\sin x| = -\sin x$，而 $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ 亦然。兩條曲線要到 $[-\pi, \pi]$ 之外才分道揚鑣：例如在 $x = 3\pi/2$ 處，$|\sin x| = 1$，但 $\sin|x| = -1$。



陰影區域由正弦曲線的兩個拱形組成，每個拱形的面積為 2。

第 (iii) 部分

這裏 $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$，所以被積函數是偶函數（兩個奇函數之積）。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

運用分部積分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$（故 $v = -\cos x$）：

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= (-\pi\cos\pi - 0) + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

第 (iv) 部分

現在 $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$，所以被積函數是奇函數（偶函數乘以奇函數）。於是它在對稱區間上的積分為

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

根本不必做十次分部積分！來自 $[-\pi, 0]$ 和 $[0, \pi]$ 的貢獻大小相等、符號相反，剛好完全抵消。

驗算

- 從面積判斷：在 (i) 中，被積函數非負且最大為 1，所以答案必定介乎 0 與 $2\pi \approx 6.28$ 之間；4 符合這個要求。
- 在 (iii) 中，$x\sin x \geq 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成立，所以答案必定為正數；2π 確是正數。對 $\sin x - x\cos x$ 求導得 $x\sin x$，由此確認原函數（antiderivative）無誤。
- 以森遜法則（Simpson's rule）取 20 000 個子區間計算，四個積分分別得 4.0000000、4.0000000、6.2831853 和 0.0000000。在 (iv) 中，這個零並非只是一個很小的數：$|x^{10}\sin x|$ 在同一區間上的積分約為 13 275，可見抵消是精確而徹底的。

常見錯誤

- 寫成 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = 0$，忽略了絕對值。一個永不取負值的被積函數，除非幾乎處處（almost everywhere）為零，否則積分不可能是 0。
- 因為 $\sin x$ 是奇函數，便以為 $\sin|x|$ 也是奇函數。任何函數與 $|x|$ 複合，得出的必定是偶函數。
- 在 (iii) 的分部積分中弄錯正負號：記住 $\cos\pi = -1$，所以 $-\pi\cos\pi = +\pi$。

STEP 之外

把函數分拆成偶部和奇部，$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$，正是傅立葉級數（Fourier series）的出發點。在 $[-\pi, \pi]$ 上，偶部展開成餘弦項，奇部展開成正弦項，而像 (iii) 和 (iv) 這類積分，正是用來計算各項係數（coefficients）的積分。例如，x 的傅立葉級數中 $\sin x$ 的係數，就是來自 (iii) 的積分。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）對傅立葉級數及其在求解微分方程（differential equations）中的應用，有一段淺白易讀的介紹。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。