詳細解答

STEP I 1992，第 2 題

純數學 • 幻方與計數

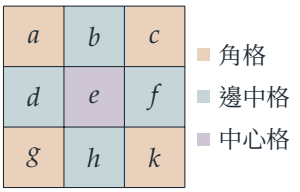
> **STEP I 1992，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

關鍵思路

一切都來自巧妙地把各條線加起來。把三個橫行全部相加，每個數恰好用了一次，由此得出 n。把通過中心的四條線相加，每個數用了一次，而中心則用了四次，這就確定了 e。此後，題目就變成一個規模不大、但須小心處理的分情況討論（case analysis）：一旦知道 e，每條通過中心的線都把兩個數配成一對，其和固定，於是留給大數的空間就非常有限。最後，正方形的對稱性（symmetry）（即把它旋轉）便替我們完成計數。

解答

先為三類方格命名會比較方便：四個角格 a, c, g, k，四個邊中格 b, d, f, h，以及中心格 e。



第 (i) 部分

三個橫行合起來，九個數每個恰好出現一次。因此，把三個橫行的和相加，

$$3n = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

故 $n = 15$。

第 (ii) 部分

通過中心的線共有四條：中間橫行、中間直行和兩條對角線。把它們相加，

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g)=4n=60.$$

在左邊，除 e 以外的每個數恰好出現一次，而 e 出現四次，所以左邊等於 $45+3e$。因此 $45+3e=60$，得 $e=5$。

由此得到一個有用的推論：由於每條通過中心的線之和都是 15，而 $e=5$，所以隔着中心相對的兩個方格，其和必為 10：

$$a+k=c+g=b+h=d+f=10.$$

第 (iii) 部分

因為 $e=5$，所以 9 不在中心格。於是我們只須證明 9 不可能在角格。

用反證法（proof by contradiction）：假設 9 在某個角格。對每個角格，論證都是一樣的，所以取 $a=9$。那麼對角的角格是 $k=10-9=1$。最上橫行和最左直行都通過 a，所以

$$b+c=15-9=6 \qquad \text{及} \qquad d+g=15-9=6.$$

b,c,d,g 這四個數互不相同，並且取自用去 $1,5,9$ 之後餘下的數，即 $\{2,3,4,6,7,8\}$。要把 6 寫成這個集合中兩個不同的數之和，唯一的方法是 $2+4$（因為 $1+5$ 用了已經填入的數，而 $3+3$ 則重複）。所以 $\{b,c\}=\{2,4\}$ 且 $\{d,g\}=\{2,4\}$，這就需要 2 和 4 各用兩次，與各數互不相同矛盾。

想一想 為甚麼只處理角格 a 就已足夠？

對任何一個角格，同樣的三項事實都成立：對角的角格必定是 1，而沿正方形的邊通過該角格的兩條線，各自餘下的兩個數之和都須為 6。所以會出現同樣的矛盾。（換個說法：把一個幻方（magic square）旋轉四分之一圈，會得到另一個幻方，而旋轉可把 a 帶到其餘每一個角格。）

所以 9 既不在中心格，也不在角格，它必定是 b,d,f,h 其中之一。

第 (iv) 部分

設 $b=9$。那麼 $h=10-9=1$，而最上橫行給出 $a+c=6$。一如 (iii)，未用的數是 $\{2,3,4,6,7,8\}$，其中和為 6 的一對相異數只有 $\{2,4\}$。所以或者 $a=2,\ c=4$，或者 $a=4,\ c=2$。

一旦 a 和 c 確定，其餘各數都由相對的數對和左右兩個直行完全決定：

- $a = 2$，$c = 4$：則 $k = 10 - a = 8$，$g = 10 - c = 6$，$d = 15 - a - g = 7$ 及 $f = 15 - c - k = 3$。
- $a = 4$，$c = 2$：則 $k = 6$，$g = 8$，$d = 15 - 4 - 8 = 3$ 及 $f = 15 - 2 - 6 = 7$。

推出這些必然的值，只說明它們是僅有的候選；我們仍須驗證它們確實可行。在兩種情況中，所填的數都是 $1, \ldots, 9$ 各一次，而且每個橫行、直行和對角線之和都是 15：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（例如在第一個之中：橫行 $15, 15, 15$；直行 $2+7+6$、$9+5+1$、$4+3+8$；對角線 $2+5+8$、$4+5+6$。）所以 $b = 9$ 的幻方恰好有兩個，而第二個是第一個以中間直行為軸的鏡像。

第 (v) 部分

把一個幻方順時針旋轉四分之一圈，會得到另一個幻方：它的橫行是原來的直行，它的直行是原來的橫行（次序倒轉），而兩條對角線互換。四分之一圈的旋轉是可逆的（逆時針轉回去），所以它給出幻方之間的一一對應（one-to-one correspondence）。

順時針旋轉四分之一圈，會把方格 b 移到方格 f。所以 $f = 9$ 的幻方，正好就是 $b = 9$ 的幻方旋轉四分之一圈所得的，而且恰好有 2 個。再轉一次，$h = 9$ 的恰好有 2 個，$d = 9$ 的也恰好有 2 個。

由 (iii)，每個幻方的 9 都恰好位於 b, f, h, d 其中一個位置，所以這四組互不相交，並且涵蓋了所有幻方。因此共有

$$4 \times 2 = 8$$

個不同的 3×3 幻方。它們就是 (iv) 中的兩個幻方，連同它們旋轉四分之一圈、半圈和四分之三圈所得的幻方；換個說法，它們是同一個幻方的八個旋轉和反射（reflection）。

驗算

用電腦對 $1, \ldots, 9$ 的全部 $9! = 362\,880$ 種排列作一次簡短的搜尋，恰好找到 8 個幻方。它們的各線之和全是 15，中心全是 5，9 全都在邊中格，而 $b = 9$ 的兩個正是 (iv) 中找到的幻方。你也可以親手驗證：在每個幻方中，1 都在 9 的對面，而偶數 $2, 4, 6, 8$ 佔滿四個角格。

常見錯誤

- 在 (iv) 中，忘記驗證推出來的方陣確實是幻方。那段推論只說明其他填法都不可行。
- 在 (v) 中，只答「2」或「4」，卻沒有解釋為甚麼旋轉會產生新的、真正不同的幻方，或者沒有利用 (iii) 說明四種情況涵蓋一切而又互不重疊。

STEP 之外

第 (v) 部分讓你初嘗*羣作用*（group action）的滋味：正方形的八個對稱（四個旋轉和四個反射）構成一個羣（group），而全部幻方在這個羣的作用下組成單一個軌道（orbit）。像這樣在對稱意義下計算物件的數目，會在伯恩賽德引理（Burnside's lemma）中得到進一步發展，你會在羣論（group theory）的入門課程中遇到它。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是一本平易近人的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。